UNIVERSITY OF HAWAII
LIBRARY
PERIODICAL
5856 771

MONATSHEFTE FÜR MATHEMATIK

GEGRÜNDET 1890 DURCH G. v. ESCHERICH UND E. WEYR
MIT DEM TITEL "MONATSHEFTE FÜR MATHEMATIK UND PHYSIK"

FORTGEFÜHRT DURCH
L. GEGENBAUER · F. MERTENS · W. WIRTINGER
H. HAHN · PH. FURTWÄNGLER · J. RADON

GEGENWÄRTIG HERAUSGEGEBEN VON
E. HLAWKA · N. HOFREITER · K. MAYRHOFER
WIEN WIEN WIEN

SCHRIFTLEITUNG
N. HOFREITER
WIEN

63. BAND, 1. HEFT
MIT 12 TEXTABBILDUNGEN
AUSGEGEBEN IM JANUAR 1959

WIEN
SPRINGER-VERLAG
1959

Mh. Math.

Monatshefte für Mathematik

Neue Folge der Monatshefte für Mathematik und Physik

erscheinen zwanglos nach Maßgabe der eingelaufenen Arbeiten in Heften wechselnden Umfanges, die zu Bänden von 300 bis 400 Seiten vereinigt werden. Der Preis eines Heftes richtet sich nach seinem Umfang und nach den entstandenen Herstellungskosten.

Die für die Monatshefte für Mathematik bestimmten Manuskripte sind

an die Schriftleitung der Monatshefte für Mathematik, Mathematisches Institut der Universität Wien, IX., Strudlhofgasse 4,

zu senden; alle geschäftlichen Mitteilungen an

Springer-Verlag, Wien, I., Mölkerbastei 5, Tel. 63 96 14 Serie, Telegrammadresse: Springerbuch Wien.

Grundsätzlich werden nur Arbeiten aufgenommen, die vorher weder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sind; der Autor verpflichtet sich, diese auch nachträglich nicht anderweitig zu veröffentlichen. Mit der Annahme und Veröffentlichung des Manuskriptes geht das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder auf den Verlag über. Es ist ferner ohne ausdrückliche Genehmigung des Verlages nicht gestattet, photographische Vervielfältigungen, Mikrofilme u. ä. von Heften der Zeitschrift, einzelnen Beiträgen oder von Teilen daraus herzustellen. Die Autoren erhalten 75 Separata ihrer Arbeit kostenlos und können maximal weitere 125 Separata zum angemessenen Preis beziehen. Die Bestellung muß mit dem dem Fahnenabzug beigelegten Bestellzettel der korrigierten Fahnen erfolgen.

Die Manuskripte sollen in klarer Ausdrucksweise und unter Weglassung jedes überflüssigen Ballastes abgefaßt sein. Die Abbildungen, deren Zahl möglichst klein gehalten werden soll, sind dem Manuskript auf gesonderten Blättern beizugeben. Sie können entweder in Reinzeichnungen (Beschriftung nur mit Bleistift ausführen) oder in klaren verständlichen Handskizzen bestehen. Die Beschriftung und nötigenfalls die Reinzeichnung nimmt der Verlag vor.

Autorenkorrekturen, d. h. nachträgliche Textänderungen, werden, soweit sie zehn Prozent der Satzkosten überschreiten, den Verfassern in Rechnung gestellt.

Der Verlag

63. Band/1. Heft — Inhaltsverzeichnis

Seite

Tschupik, J. P. Über die Abbildung des projektiven R_n durch zwei Projektionen 1

Zink, R. E. On Regular Measures and Baire Functions 19

Kuipers, L. Generalized Legendre's Associated Functions (Integral Theorems, Recurrence Formulas) 24

Unkelbach, H. Die Vollständigkeit der funktionentheoretischen Invarianten kongruenter Kreisbogenecken 32

Horninger, H. Über Trochoidenschraublinien und zyklische Schraubflächen 39

Lesky, P. Unendliche orthogonale Matrizen und Laguerresche Matrizen . . 59

Buchbesprechungen 84

Über die Abbildung des projektiven R_n durch zwei Projektionen

Von

Josef P. Tschupik, Graz

(*Eingegangen am 25. Januar 1958*)

Mit 7 Textabbildungen

1. Einleitung

Als Projektion bezeichnet man in der darstellenden Geometrie i. a. eine Abbildung der Raumpunkte P auf die Punkte P' einer gegebenen Bildebene Π, wobei P und P' perspektiv liegen, d. h. an Strahlen durch einen festen Punkt Z — das Projektionszentrum — gebunden sind.

In der von *F. Hohenberg*[1] stammenden Verallgemeinerung des Begriffes Projektion können *Zentrum* Z und *Bildraum* Π beliebige lineare Teilräume eines projektiven R_n sein. Das Bild P' eines Punktes P, der nicht dem Zentrum angehört, findet man als Schnitt des Verbindungsraumes von P und Z mit Π. P' wird i. a. ein linearer Teilraum von Π sein. Ist P' insbesondere wieder ein Punkt, so möge eine solche spezielle Projektion als *P-Projektion* bezeichnet werden.

Die vorliegende Arbeit befaßt sich mit *Zweibildersystemen*, die durch gleichzeitige Ausübung zweier P-Projektionen entstehen. Ein Punkt P des R_n wird auf ein *Bildpaar* P', P'' abgebildet. Es soll hier untersucht werden, wie die Beziehung zwischen *Urbild* P und Bildpaar P', P'' durch die Dimension und gegenseitige Lage der Zentren und Bildräume beeinflußt wird.

2. P-Projektionen

Zwei lineare Teilräume Z und Π des R_n bestimmen dann eine P-Projektion, wenn sie punktfremd sind und wenn für ihre Dimensionen die Beziehung[2]

[1] *F. Hohenberg*, Projektionen projektiver Räume, Monatshefte für Mathematik 61 (1957), S. 54—66.

[2] Siehe z. B. *F. Hohenberg*, l. c., S. 55.

$$\dim Z + \dim \Pi = n - 1 \tag{1}$$

gilt. Wir setzen $n - \dim Z = r$; dann ist $\dim Z = n - r$ und wegen (1) ist $\dim \Pi = r - 1$. Im Falle $r = 1$, $\dim \Pi = 0$ werden alle R_n-Punkte P auf einen und denselben Bildpunkt Π abgebildet. Schließt man diese triviale Projektion aus, so ist r eine natürliche Zahl[3] mit $2 \leqq r \leqq n$.

Liegt ein Punkt P nicht in Z, so gilt für den Verbindungsraum[4] $p = [Z\,P]$ von Z mit P

$$\dim p = n - r + 1$$

und es ist die Dimension des Schnittraumes P' von p mit Π

$$\dim P' = \dim (p\,\Pi) = (n - r + 1) + (r - 1) - n = 0,$$

also P' tatsächlich ein Punkt. Alle Punkte von p, die nicht in Z liegen, haben denselben Bildpunkt P'. Liegt P in Z, so ist p und daher auch P' unbestimmt; liegt P in Π, so ist $P' \equiv P$.

(2) *Ist R_k ein linearer Teilraum des R_n und enthält R_k das Zentrum Z, so kann man Z und den Schnittraum $(\Pi\,R_k)$ als Zentrum und Bildraum für eine P-Projektion innerhalb des R_k verwenden,* denn es ist

$$\dim (\Pi\,R_k) = (r - 1) + k - n,$$

also $\dim (\Pi\,R_k) + \dim Z = k - 1$. Z und $(\Pi\,R_k)$ sind auch punktfremd, da ja zuvor Z und Π punktfremd waren.

Sind R_p und R_q zwei punktfremde lineare Teilräume des R_n, so folgt aus $\dim [R_p\,R_q] = p + q + 1 = n^*$ oder $p + q = n^* - 1$ wegen (1):

(3) *Zwei beliebige punktfremde Räume R_p und R_q können als Zentrum und Bildraum einer P-Projektion in ihrem Verbindungsraum $[R_p\,R_q]$ verwendet werden.*

---

[3] Man kann zeigen, daß eine P-Projektion eine spezielle singuläre Kollineation im R_n ist. r bedeutet dann den Rang der Transformationsmatrix (a_{ik}) in $\varrho y_i = a_{ik}\,x_k$. Vgl. hiezu z. B. *E. Bertini*, Einführung in die Geometrie mehrdimensionaler Räume, Verlag von L. W. Seidel und Sohn in Wien, 1924, S. 65ff.

[4] Sind R_p, R_q punktfremde lineare Teilräume des R_n, so findet man bekanntlich die Dimension ihres Verbindungsraumes $[R_p\,R_q]$ mit $\dim [R_p\,R_q] = p + q + 1$ und es ist dann $p + q + 1 \leqq n$. Haben R_p und R_q einen Schnittraum R_s, so ist $\dim [R_p\,R_q] = p + q - s$.

Für den Schnittraum $(R_p\,R_q)$ von R_p und R_q gilt $\dim (R_p\,R_q) \geqq p + q - n$ und zwar sprechen wir bei $\dim (R_p\,R_q) = p + q - n$ von allgemeiner Lage der Räume zueinander (insbes. bei $p + q - n < 0$, wenn R_p und R_q punktfremd sind). Durch spezielle Wahl der beiden Räume kann man immer $\dim (R_p\,R_q) > \text{Max.}\,(p + q - n, -1)$ erreichen. In der vorliegenden Arbeit sind die Schnittraumdimensionen, wenn nicht anders angegeben, stets für allgemeine Lage berechnet.

3. Zweibildersysteme

Gegeben seien zwei P-Projektionen durch die Zentren Z_i mit den Dimensionen $n - r_i$ und durch die Bildräume Π_i mit den Dimensionen $r_i - 1$ $(i=1, 2)$. Jeder Punkt P des R_n, der weder in Z_1 noch in Z_2 liegt, werde mit Hilfe der projizierenden Räume $p_i = [Z_i P]$ gleichzeitig auf $P' = (p_1 \Pi_1)$ in Π_1 und auf $P'' = (p_2 \Pi_2)$ in Π_2 abgebildet. P ist also ein eindeutig bestimmtes Bildpaar P', P'' zugeordnet.

3. 1. Lage der Zentren und Bildräume

Die gegenseitige Lage der Zentren und Bildräume drückt sich in den Dimensionen der Schnitträume $Z = (Z_1 Z_2)$, $X = (\Pi_1 \Pi_2)$ und $(Z_i \Pi_j)$ $(i, j = 1, 2$ und $i \neq j)$ aus; die Schnitträume $(Z_i \Pi_i)$ dürfen nicht auftreten, da nach Voraussetzung P-Projektionen vorliegen.

1) Es ist $\dim Z = (n - r_1) + (n - r_2) - n = n - (r_1 + r_2)$. Notwendig für die Punktfremdheit von Z_1 und Z_2 ist $n - (r_1 + r_2) < 0$ bzw.

$$(4)\quad r_1 + r_2 \geqq n + 1.$$

2) Es ist $\dim X = (r_1 - 1) + (r_2 - 1) - n = r_1 + r_2 - (n + 2)$. Notwendig für die Punktfremdheit von Π_1 und Π_2 ist dann $r_1 + r_2 - (n + 2) < 0$ bzw.

$$(5)\quad r_1 + r_2 \leqq n + 1.$$

Eine hinreichende Bedingung für die Existenz von X ist $\dim X \geqq 0$, also

$$(6)\quad r_1 + r_2 \geqq n + 2.$$

3) Sollen gleichzeitig die Schnitträume Z und X leer sein, so folgt aus (4) und (5) die notwendige Bedingung

$$(7)\quad r_1 + r_2 = n + 1.$$

4) Es ist $\dim (Z_i \Pi_j) = (n - r_i) + (r_j - 1) - n = r_j - (r_i + 1)$. Notwendig für die Punktfremdheit von Z_i und Π_j ist dann bei fixem i

$$(8)\quad r_i + 1 > r_j.$$

Sollen gleichzeitig $(Z_1 \Pi_2)$ und $(Z_2 \Pi_1)$ leer sein, so folgt aus (8) wegen $r_2 + 1 > r_1$ und $r_1 + 1 > r_2$ die Bedingung

$$(9)\quad r_1 = r_2.$$

5) Sollen gleichzeitig die Schnitträume $Z = (Z_1 Z_2)$, $X = (\Pi_1 \Pi_2)$, $(Z_1 \Pi_2)$ und $(Z_2 \Pi_1)$ leer sein, so folgt aus (7) und (9) die Bedingung

$n = 2r_1 - 1$, d. h. *es gibt nur in Räumen ungerader Dimension Zweibildersysteme (die aus zwei P-Projektionen zusammengesetzt sind) mit paarweise punktfremden Zentren und Bildräumen.*

Im Zweibildersystem sind ferner die Verbindungsräume $O = [Z_1 Z_2]$, $p_0 = [O P] = [p_1 p_2]$ (P bedeutet dabei einen beliebigen Punkt des R_n, der nicht in O liegt), sowie die Schnitträume $O_i = (O \Pi_i)$ und $(O X)$ von Bedeutung, soferne sie nicht leer sind. Wann treten nun diese ausgezeichneten Räume auf?

6) Es ist $\dim O = (n - r_1) + (n - r_2) + 1 = 2n + 1 - (r_1 + r_2)$. O tritt als echter Teilraum des R_n auf, wenn $\dim O < n$ ist. Dies führt zur hinreichenden Bedingung

$$(10)\quad n + 2 \leqq r_1 + r_2.$$

7) Es ist $\dim p_0 = [2n + 1 - (r_1 + r_2)] + 0 + 1 = 2n + 2 - (r_1 + r_2)$. Soll $\dim p_0 < n$ sein, so erhält man die hinreichende Bedingung

$$(11)\quad n + 2 < r_1 + r_2.$$

8) Es ist $\dim O_i = [2n + 1 - (r_i + r_j)] + (r_i - 1) - n = n - r_j = \dim Z_j$. Wegen $\dim Z_j \geqq 0$ ist auch $\dim O_i \geqq 0$. Liegen O und Π_i allgemein, so ist $O_i = (O \Pi_i)$ immer dann echter Teilraum von Π_i, wenn O echter Teilraum des R_n ist. Die notwendige Bedingung für $\dim O_i < \dim \Pi_i$ ist also

$$(12)\quad n + 2 \leqq r_1 + r_2.$$

Die Ergebnisse von 2), 6), 7) und 8) lassen sich zusammenfassen in:

(13) *Die Voraussetzung* $n + 2 \leqq r_1 + r_2$ *reicht hin für die Existenz von* X, $O(O \neq R_n)$ *und* $O_i(O_i \neq \Pi_i)$. *Gilt jedoch* $n + 2 < r_1 + r_2$, *so existiert außer diesen Räumen auch noch* p_0 *als echter Teilraum des* R_n.

9) *O und X sind bei allgemeiner Lage punktfremd*, denn es ist

$$\dim (OX) = [2n + 1 - (r_1 + r_2)] + [r_1 + r_2 - (n + 2)] - n = -1.$$

3.2. a-Systeme

Ein Zweibildersystem heiße *a-System*, wenn $\dim Z$, $\dim X$ und $\dim (OX)$ den kleinstmöglichen Wert haben (siehe 3. 1. unter 1), 2) und 9)), d. h. wenn die Zentren und Bildräume möglichst allgemein liegen.

Man kommt zu einer Einteilung der a-Systeme, wenn man die Urbildmannigfaltigkeit betrachtet, die zu einem vorgegebenen Bildpaar P', P'' gehört.

Alle Punkte mit dem Bild $P^{(i)}$ liegen in $p_i = [Z_i P^{(i)}]$, also liegen alle Punkte mit dem Bildpaar P', P'' im Schnittraum $(p_1 p_2)$. Nun ist

$$\dim(p_1 p_2) = (n - r_1 + 1) + (n - r_2 + 1) - n = n + 2 - (r_1 + r_2)$$

und je nachdem dim $(p_1 p_2 \gtreqless 0$ bzw. $n + 2 \gtreqless r_1 + r_2$ ist, wird man verschiedene Typen von a-Systemen erhalten[5].

3. 2. 1. *a-Systeme mit* $n + 2 = r_1 + r_2$

Wir setzen voraus, daß $P^{(i)}$ nicht in O_i liege[6], dann ist wegen dim $(p_1 p_2) = O$ jedem beliebigen Punktepaar P', P'' $(P^{(i)} \in \Pi_i)$ ein und nur ein Punkt P als Urbild zugeordnet. Eine Kontrolle bietet auch die Abzählung. Für $P^{(i)}$ gibt es $\infty^{r_i - 1}$ mögliche Lagen in Π_i, für das Bildpaar P', P'' also $\infty^{r_1 - 1} \cdot \infty^{r_2 - 1} = \infty^{r_1 + r_2 - 2}$. Nach Voraussetzung ist $r_1 + r_2 - 2 = n$, also stehen den ∞^n Punkten P wirklich ∞^n Bildpaare P', P'' gegenüber. Ein Beispiel für dieses a-System ist die *Kotierte Projektion* im R_3.[7]

3. 2. 2. *a-Systeme mit* $n + 2 < r_1 + r_2$

Unter dieser Annahme ist dim $(p_1 p_2) < 0$, d. h. bei willkürlich vorgegebenem Punktepaar P', P'' $(P^{(i)} \in \Pi_i)$ sind die zugehörigen projizierenden Räume p_1, p_2 i. a. punktfremd, es gibt also i. a. keinen Punkt P mit P', P'' als Bildpaar. Dasselbe zeigt die Abzählung, denn es stehen den ∞^n Punkten des R_n $\infty^{r_1 + r_2 - 2}$ Möglichkeiten für Punktepaare P', P'' gegenüber, wobei nach Voraussetzung $r_1 + r_2 - 2 > n$ ist; P', P'' müssen also abhängig sein, wenn sie Bildpaar eines Punktes P sein sollen.

Nach (13) existieren im vorliegenden Falle die Räume X, O, O_i und p_0 als echte Teilräume des R_n. Der Abbildungsvorgang eines Punktes P kann sich nur innerhalb des Raumes $[Z_1 Z_2 P] = [OP] = p_0$ vollziehen, daher muß $P^{(i)}$ in $(p_0 \Pi_i)$ liegen. Da dim $p_0 < n$ ist, tritt $(p_0 \Pi_i)$ als echter Teilraum von Π_i auf. Andererseits ist wegen $[Z_j P] = p_j$

$$(p_0 \Pi_i) = ([Z_i Z_j P] \Pi_i) = ([Z_i p_j] \Pi_i) = p_j^{(i)} \text{ mit } \dim p_j^{(i)} = n - r_j + 1,$$

also liegt $P^{(i)}$ auf $p_j^{(i)}$. $p_j^{(i)}$ heiße Ordner in Π_i. Gibt man $P^{(j)} (P^{(j)} \notin O_j)$[6] in Π_j willkürlich vor, so ist $p_0 = [OP] = [OP^{(j)}]$ und daher auch der entsprechende Ordner $p_j^{(i)} = (p_0 \Pi_i)$ in Π_i eindeutig bestimmt. Abzählung: $P^{(j)}$ ist in Π_j auf $\infty^{r_j - 1}$ Arten wählbar; für $P^{(i)}$ gibt es $\infty^{n - r_j + 1}$ mögliche Lagen innerhalb $p_j^{(i)}$, es reduziert sich also die Anzahl der Punktepaare P', P'', die als Bildpaare von R_n-Punkten P zu betrachten sind, auf $\infty^{r_j - 1} \cdot \infty^{n - r_j + 1} = \infty^n$.

Da O in p_0 liegt, muß $O_i = (O \Pi_i)$ in $p_j^{(i)} = (p_0 \Pi_i)$ liegen. Weiters müssen sich entsprechende Ordner p_1'' und p_2' in einem Punkt von X

---

[5] Vgl. auch *F. Hohenberg*, l. c., S. 56.

[6] Der Fall $P \in O$, also $P^{(i)} \in O_i$ wird unter 3.2.3.1. behandelt werden.

[7] Vgl. *F. Hohenberg*, l. c., S. 59. Siehe auch vorl. Arbeit unter 3.2.3.1.

schneiden, denn es ist

$$\dim (p_0 X) = [2n + 2 - (r_1 + r_2)] + [r_1 + r_2 - (n + 2)] - n = 0.$$

Mit Hilfe dieser Eigenschaften kann man zu einem vorgegebenen $P^{(j)}$ in $\Pi_j (P^{(j)} \notin O_j)$ den entsprechenden Ordner $p_j^{(i)}$ in Π_i finden, ohne im Urbildraum p_0 aufsuchen zu müssen, d. h. man hat nur Operationen in den Bildräumen durchzuführen. Den Ordner $p_i^{(j)}$ in Π_j findet man als Verbindungsraum $[O_j P^{(j)}]$; schneidet man diesen mit X im Punkt $\overline{P} = (X[O_j P^{(j)}])$, so ist $p_j^{(i)} = [O_i \overline{P}]$.

Zusammenfassend gilt:

(14) *In einem a-System vom Typus $n + 2 < r_1 + r_2$ ist ein Punktepaar P', P'' ($P^{(i)} \in \Pi_i$, aber $P^{(i)} \notin O_i$) dann und nur dann Bildpaar eines R_n-Punktes P, wenn P' und P'' auf entsprechenden Ordnern liegen. Die Ordner in Π_i haben die Dimension $n - r_j + 1$ und enthalten O_i; je zwei entsprechende Ordner p_1'' und p_2' schneiden sich in einem Punkt von X.*

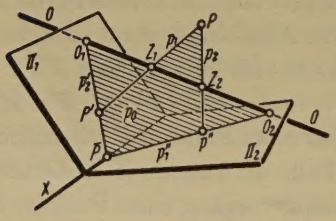

Abb 1

Ein Beispiel für ein *a*-System dieser Art ist das *allgemeine Zweibilderprinzip*[8] im R_3; man erhält es für $n = r_i = 3$ $(i = 1, 2)$ und es ist dann $\dim Z_i = 0$, $\dim \Pi_i = 2$, $\dim p_i = 1$, $\dim O = 1$, $\dim O_i = 0$, $\dim X = 1$, $\dim p_i^{(j)} = 1$ und $\dim p_0 = 2$ (Abb. 1).

3. 2. 3. *a-Systeme mit $n + 2 > r_1 + r_2$*

Wie schon erwähnt, erfüllen in diesem Falle die Urbilder zu einem gegebenen Bildpaar P', P'' einen Raum der Dimension $n + 2 - (r_1 + r_2)$, nämlich den Schnittraum $(p_1 p_2)$. Den ∞^n Punkten P des R_n stehen $\infty^{r_1 + r_2 - 2}$ Punktepaare P', P'' gegenüber, wobei nach Voraussetzung $r_1 + r_2 - 2 < n$ ist. Da nun ein Punktepaar P', P'' Bildpaar von $\infty^{n+2-(r_1+r_2)}$ Punkten aus $(p_1 p_2)$ ist, ist die Anzahl der Urbilder

$$\infty^{n+2-(r_1+r_2)} \cdot \infty^{r_1+r_2-2} = \infty^n.$$

Nun soll die Lage der $(p_1 p_2)$ im R_n untersucht werden. Nach (4) sind unter der Voraussetzung $r_1 + r_2 \geqq n + 1$ die Zentren punktfremd. Wir haben $r_1 + r_2 < n + 2$ oder gleichbedeutend damit $r_1 + r_2 \leqq n + 1$ vorausgesetzt; es wird also zweckmäßig sein, den Fall $r_1 + r_2 = n + 1$,

[8] Siehe *E. Müller*, Vorlesungen über darstellende Geometrie, Bd. 1, Die linearen Abbildungen, bearbeitet von *E. Kruppa*, Verlag Deuticke, Leipzig und Wien, 1923, S. 125ff.

in dem die Zentren punktfremd sind, vom Fall $r_1 + r_2 < n + 1$ zu trennen.

3. 2. 3. 1. *Es sei* $r_1 + r_2 = n + 1$

O tritt nach (10) nicht mehr als echter Teilraum des R_n auf, um so weniger daher $p_0 = [OP]$. Für die Dimension der Urbildräume $(p_1\, p_2)$ folgt aus unserer Voraussetzung

$$\dim (p_1\, p_2) = n + 2 - (r_1 + r_2) = 1.$$

Z_i und $(p_i\, p_j)$ liegen in p_i; für ihren Schnittraum innerhalb des Oberraumes p_i gilt

$$\dim ((p_i\, p_j)\, Z_i) = 1 + (n - r_i) - (n - r_i + 1) = 0,$$

d. h. die $(p_1\, p_2)$ sind Treffgeraden von Z_1 und Z_2. Die Treffgeradenanzahl und die Anzahl der Bildpaare stimmen überein, denn es gibt

$$\infty^{n-r_1} \cdot \infty^{n-r_2} = \infty^{2n-(r_1+r_2)} = \infty^{n-1} \text{ Treffgeraden}$$

$$\text{und } \infty^{r_1-1} \cdot \infty^{r_2-1} = \infty^{r_1+r_2-2} = \infty^{n-1} \text{ Bildpaare.}$$

Durch jeden Punkt $P(P \in Z_i)$ des R_n kann man p_1 und p_2 legen, daher geht durch P eine Treffgerade $(p_1\, p_2)$. Umgekehrt läßt sich jede Treffgerade g von Z_1 und Z_2 als $(p_1\, p_2)$ auffassen, denn in $p_i = [Z_i(g\, Z_j)]$ ist ganz g enthalten. Zusammenfassend gilt:

(15) *In einem a-System vom Typus* $r_1 + r_2 = n + 1$ *sind die Zentren punktfremd und die* ∞^{n-1} *Treffgeraden von* Z_1 *und* Z_2 *bilden sich eineindeutig auf die* ∞^{n-1} *Bildpaare* $P', P''(P^{(i)} \in \Pi_i)$ *ab.*

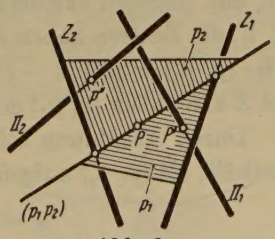

Abb. 2

Ein solches a-System findet man im R_3, wenn man $r_i = 2$ setzt[9]. Es ist dann $\dim Z_i = 1$ und $\dim \Pi_i = 1$, d. h. die beiden Zentren sind windschiefe Geraden und ebenso die beiden Bildräume (Abb. 2).

Mit Hilfe von (15) läßt sich klären, wie in einem a-System vom Typus $r_1 + r_2 \geqq n + 2$ die Punkte aus O abgebildet werden. Nach (10) existiert O in einem solchen System als echter Teilraum des R_n und es ist $\dim O = 2n + 1 - (r_1 + r_2) = \bar{n}$. Die Abbildung der Punkte von O führt nicht aus O heraus, da alle auftretenden p_1, p_2 in O liegen. Nach (2) werden die Punkte von O aus $\bar{Z}_i = Z_i$ auf $\overline{\Pi}_i = (O\, \Pi_i) = O_i$ abgebildet. Da $Z_i, \Pi_i (i = 1, 2)$ nach Voraussetzung ein a-System bestimmen, gilt dasselbe auch für $\bar{Z}_i, \overline{\Pi}_i$. Weiters folgt aus

[9] Vgl. auch *F. Hohenberg*, l. c., S. 61.

$$\dim \overline{\Pi}_i = \dim O_i = n - r_j = \bar{r}_i - 1$$

die Beziehung $\bar{r}_i = n - r_j + 1$ und daraus $\bar{r}_1 + \bar{r}_2 = 2n + 2 - (r_1 + r_2) = \bar{n} + 1$. Es gilt also:

(16) *In den a-Systemen mit* $r_1 + r_2 \geqq n + 2$ *erfolgt die Abbildung der Punkte Q aus O durch ein a-System vom Typus* $\bar{r}_1 + \bar{r}_2 = \bar{n} + 1$, *d. h. die Treffgeraden von* Z_1 *und* Z_2 *bilden sich auf die Punktepaare* $Q', Q''(Q^{(i)} \in O_i)$ *ab. Liegt Q in* Z_i, *so ist* $Q^{(i)}$ *unbestimmt und* $Q^{(j)}$ *liegt in* O_j.

Ein Beispiel für $r_1 + r_2 = n + 2$ ist bekanntlich die Kotierte Projektion[7] im R_3. Sie ist zusammengesetzt aus dem Normalriß aus dem Fernpunkt Z_1 auf die Bildebene Π_1 und aus der Projektion aus der Ferngeraden Z_2 von Π_1 auf eine eigentliche Gerade Π_2 durch Z_1. O ist hier die Fernebene. Die Treffgeraden von Z_1 und Z_2 bilden hier das Ferngeradenbüschel Z_1. Sie bilden sich ab auf die Punkte von $\overline{\Pi}_1 = (O\Pi_1) = Z_2$, also auf die Fernpunkte von Π_1 und auf den Punkt $\overline{\Pi}_2 = (O\,\Pi_2) = Z_1$, d. h. auf die Kote ∞.

Ein Beispiel für $r_1 + r_2 > n + 2$ ist das allgemeine Zweibilderprinzip im R_3 (Abb. 1). Hier gibt es nur eine einzige Treffgerade von Z_1 und Z_2, nämlich O. Die Bildräume $\overline{\Pi}_1 = O_1$, $\overline{\Pi}_2 = O_2$ sind Punkte, d. h. es gibt nur ein einziges Bildpaar für die Punkte aus O.

3. 2. 3. 2. *Es sei* $r_1 + r_2 < n + 1$

Nach (10) tritt in diesem Falle O nicht mehr als echter Teilraum des R_n auf, dagegen existiert Z nach (4) und es ist $\dim Z = n - (r_1 + r_2)$, d. h. die Zentren haben stets einen Schnittraum. Für $(p_1\, p_2)$ gilt wieder $\dim (p_1\, p_2) = n + 2 - (r_1 + r_2)$. Z liegt in Z_i, Z_i liegt in allen p_i, daher ist Z auch allen $(p_1\, p_2)$ gemein.

Durch Abzählung soll geklärt werden, ob jeder $R_{n+2-(r_1+r_2)}$, der Z enthält, als $(p_1\, p_2)$ aufgefaßt werden kann. Es gibt

$$\infty^{2(n-[n+2-(r_1+r_2)])} = \infty^{2(r_1+r_2-2)}$$

Räume der Dimension $n + 2 - (r_1 + r_2)$, die einen gegebenen $R_{n-(r_1+r_2)}$, nämlich Z, enthalten[10]. Dagegen gibt es

$$\infty^{r_1-1} \cdot \infty^{r_2-1} = \infty^{r_1+r_2-2}$$

Bildpaare P', P''. Diese beiden Anzahlen stimmen nur für $r_1 + r_2 - 2 = 0$ überein, doch müßte man dann $r_1 = 0$ oder $r_1 = 1$ wählen, was wir stets ausgeschlossen haben. Man erkennt also, daß nicht jeder $R_{n+2-(r_1+r_2)}$, der Z enthält, als $(p_1\, p_2)$ aufgefaßt werden kann. Welche Bedingung haben also die $(p_1\, p_2)$ zu erfüllen? $(p_i\, p_j)$ und Z_i liegen in p_i und enthalten Z, daher gilt innerhalb des Oberraumes p_i

$$\dim((p_i p_j) Z_i) = [n + 2 - (r_i + r_j)] + (n - r_i) - (n - r_i + 1) = \\ = n + 1 - (r_i + r_j).$$

Bezeichnen wir $((p_i\, p_j)\, Z_i)$ mit T_i, so müssen alle T_i durch Z gehen und die Dimension $n + 1 - (r_1 + r_2)$ haben. Von einem beliebigen $R_{n+1-(r_1+r_2)}$, der durch Z geht und in Z_i liegt, kann man noch nicht sagen, ob er ein T_i ist, wir bezeichnen ihn daher mit T_i^*. Es gibt dann [10]

$$\infty^{1.(n-r_i-[n+1-r_i-r_j])} = \infty^{r_j - 1}$$

solche T_i^* und $\infty^{(r_1-1)+(r_2-1)} = \infty^{r_1+r_2-2}$ Verbindungsräume $[T_1^*\, T_2^*]$. Weiters ist

$$\dim[T_1^*\, T_2^*] = 2(n + 1 - r_1 - r_2) - (n - r_1 - r_2) = n + 2 - (r_1 + r_2).$$

Man sieht, daß die Anzahl der $[T_1^*\, T_2^*]$ mit der Anzahl der Bildpaare übereinstimmt und daß ihre Dimension gleich groß ist wie die der $[T_1\, T_2] = (p_1\, p_2)$. Falls man zeigen kann, daß jedem $[T_1^*\, T_2^*]$ ein Bildpaar P', P'' zugeordnet ist, so folgt daraus $T_i^* = T_i$ und $[T_1^*\, T_2^*] = (p_1\, p_2)$. Zur Abbildung von $[T_1^*\, T_2^*]$ benötigt man den Verbindungsraum $[[T_i^*\, T_j]\, Z_j] = [T_i^*\, Z_j]$ (T_j^* konnte man weglassen, weil T_j^* schon in Z_j enthalten ist). Nun ist

$$\dim[T_i^*\, Z_j] = (n + 1 - r_i - r_j) + (n - r_j) - (n - r_i - r_j) = \\ = n - r_j + 1 = \dim p_j,$$

d. h. $[T_i^*\, Z_j]$ ist ein p_j, weil ja jeder R_{n-r_j+1} durch Z_j ein p_j ist. Das Bild von $[T_1^*\, T_2^*]$ ist daher $(p_j\, \Pi_j) = R_0 = P^{(j)}$, also ist tatsächlich jedem $[T_1^*\, T_2^*]$ ein bestimmtes Punktepaar P', P'' als Bildpaar zugeordnet und es muß daher $T_i^* = T_i$ und $[T_1^*\, T_2^*] = (p_1\, p_2)$ sein. Zusammenfassend gilt:

(17) *In einem a-System vom Typus $r_1 + r_2 < n + 1$ erfüllen die Urbildpunkte eines Bildpaares P', P'' einen $R_{n+2-(r_1+r_2)} = [T_1\, T_2]$, wobei die T_i in Z_i liegen, Z enthalten und die Dimension $n + 1 - (r_1 + r_2)$* haben.

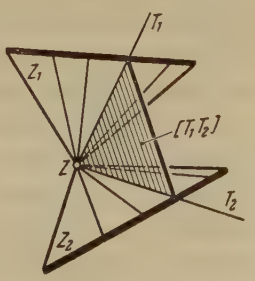

Abb. 3

Beispiel: Um eine nichtausgearbeitete Abbildung zu erhalten, muß man $r_i > 1$, also $r_1 + r_2 \geqq 4$ voraussetzen. Wählt man $r_1 = r_2 = 2$, so erhält man wegen der Voraussetzung $r_1 + r_2 < n + 1$ als kleinsten Wert für die Dimension des Oberraumes $n = 4$. Daraus bestimmt man

$$\dim Z_i = 2, \qquad \dim \Pi_i = 1,$$

[10] Vgl. hiezu z. B. *E. Bertini*, l. c., S. 36.

$$\dim p_i = 3, \qquad \dim T_i = 1,$$
$$\dim Z = 0 \text{ und } \dim [T_1\, T_2] = 2.$$

Abb. 3 zeigt in einer Skizze die Lage der Urbildräume in diesem Beispiel.

3. 2. 4. *Übersicht über die a-Systeme*

Aus den bisherigen Ergebnissen erhält man folgende Einteilung:

$r_1 + r_2 < n + 1$ Nach (17) bilden sich die $[T_1\, T_2]$ durch Z auf die Punktepaare P', P'' $(P^{(i)} \in \Pi_i)$ ab.

$r_1 + r_2 = n + 1$ Z_1 und Z_2 sind punktfremd; nach (15) bilden sich die Treffgeraden von Z_1 und Z_2 auf die Punktepaare $P', P''(P^{(i)} \in \Pi_i)$ ab.

$r_1 + r_2 = n + 2$ Den Punkten $P(P \notin O)$ des R_n sind eineindeutig die Punktepaare $P', P''(P^{(i)} \in \Pi_i, P^{(i)} \notin O_i)$ zugeordnet. Die Punkte Q aus O werden durch ein a-System vom Typus $\bar{r}_1 + \bar{r}_2 = \bar{n} + 1$ auf die Punktepaare Q', Q'' mit $Q^{(i)} \in O_i$ abgebildet (siehe 3. 2. 1. und (16)).

$r_1 + r_2 > n + 2$ Die Bilder $P^{(i)}$ $(i=1, 2)$ eines Punktes $P(P \notin O)$ sind nach (14) in Π_i an Order durch O_i von der Dimension $n - r_j + 1$ gebunden. Entsprechende Ordner schneiden sich in einem Punkt von X. Die Punkte Q aus O werden nach (16) durch ein a-System vom Typus $\bar{r}_1 + \bar{r}_2 = \bar{n} + 1$ auf die Punktepaare $Q', Q''(Q^{(i)} \in O_i)$. abgebildet.

3.3. z-Systeme

3.3. 1. *Allgemeines*

Ein Zweibildersystem soll z-System heißen, wenn $\dim X$ und $\dim (O X)$ den kleinstmöglichen Wert haben, während $\dim Z = z$ den Minimalwert $n - (r_1 + r_2)$ überschreitet und $\geqq 0$ ist; es gilt also

(18) $Z = R_z$ mit Max. $(0, n + 1 - (r_1 + r_2)) \leqq z \leqq$ Min. $(n - r_1, n - r_2)$

Ist P ein allgemein liegender Punkt des R_n, so schneiden sich die zugehörigen p_i in $(p_1\, p_2)$, wobei $\dim (p_1\, p_2) = z + 1$ ist, da die p_i außer P auch Z und daher den ganzen Verbindungsraum $[Z\, P] = R_{z+1}$ gemein haben; in allen z-Systemen ist also die Dimension der Urbildräume stets > 0.

Wann leistet ein z-System mehr als eine seiner beiden P-Projektionen? Wir sagen, daß ein Abbildungsverfahren A_1 mehr leistet als ein Abbildungsverfahren A_2, wenn die ∞^n Punkte des R_n vermöge $A_v (v = 1, 2)$

auf ∞^{n_v} Bildpunkte oder Bildpaare abgebildet werden, wobei $n_1 > n_2$ ist. Im z-System gibt es wie beim a-System $\infty^{r_1+r_2-2}$ Punktepaare P', P'' ($P^{(i)} \in \Pi_i$), dagegen gibt es nun ∞^{n-z-1} Möglichkeiten für die Urbildräume R_{z+1} durch Z. Aus (18) folgt

$$(19)\quad n - z - 1 \leqq r_1 + r_2 - 2,$$

d. h. es gibt i. a. mehr Möglichkeiten für Punktepaare P', P'' als für Urbildräume. Es können sicherlich nicht mehr als ∞^{n-z-1} Bildpaare auftreten; diese Anzahl tritt aber sicher auf, da verschiedenen R_{z+1} verschiedene Paare p_1, p_2 und diesen wieder verschiedene Paare P', P'' entsprechen. Zur P-Projektion Z_i, Π_i gehören ∞^{r_i-1} Bildpunkte. Die Gegenüberstellung zeigt $r_i - 1 \leqq n - z - 1$, da ja nach Voraussetzung $z \leqq n - r_i$ ist. Abgesehen vom Fall $z = n - r_i$ (hier ist $i = 1$ oder 2, aber fix), in dem das z-System gleich viel leistet wie die P-Projektion T_i, Π_i, leistet also das z-System stets mehr als eine seiner beiden P-Projektionen. Im Falle $z = n - r_i$ (i fix) ist $Z = Z_i$, daher $n - r_i \leqq n - r_j$ und $r_j - 1 \leqq r_i - 1$, d. h. die Abbildung aus Z_j auf Π_j ist überflüssig, denn Z_i, Π_i leistet mehr als die Abbildung Z_j, Π_j und gleich viel wie das z-System. In Hinkunft werde daher der Fall $z = n - r_i$ ausgeschlossen.

In allen z-Systemen tritt O als echter Teilraum des R_n auf, denn wegen (18) gilt

$$\dim O = \dim [Z_1 Z_2] = (n - r_1) + (n - r_2) - z = 2n - (r_1 + r_2 + z) < n.$$

Man kann zeigen, daß in allen z-Systemen die Abbildung der Punkte aus O gleich vor sich geht. Nach (2) werden die Punkte von O aus $\bar{Z}_i = Z_i$ auf $\bar{\Pi}_i = (O\,\Pi_i) = O_i$ abgebildet. Z_i und Π_i sind nach Voraussetzung punktfremd, innerhalb O ist $Z = (\bar{Z}_1\,\bar{Z}_2)$ der kleinste Schnittraum von $\bar{Z}_1$ und $\bar{Z}_2$, also definieren $\bar{Z}_i, \bar{\Pi}_i$ (i=1, 2) ein a-System. In diesem a-System ist

$$\dim O = 2n - (r_1 + r_2 + z) = \bar{n}$$

und

$$\dim \bar{\Pi}_i = 2n - (r_i + r_j + z) + (r_i - 1) - n = n - (r_j + z + 1) = \bar{r}_i - 1.$$

Daraus folgt $\bar{r}_i = n - (r_j + z)$ und $\bar{r}_1 + \bar{r}_2 = 2n - (r_1 + r_2 + 2z)$, also schließlich $\bar{r}_1 + \bar{r}_2 < \bar{n} + 1$. Also gilt:

(20) *In allen z-Systemen werden die Punkte Q aus O durch ein a-System vom Typus* $\bar{r}_1 + \bar{r}_2 < \bar{n} + 1$ *auf die Punktepaare* Q', Q'' ($Q^{(i)} \in O_i$) *abgebildet.*

Nach (17) findet man für die ausgezeichneten Räume in diesem a-System $\dim \bar{Z} = \bar{n} - (\bar{r}_1 + \bar{r}_2) = z$, $\dim \bar{T}_i = \bar{n} + 1 - (\bar{r}_1 + \bar{r}_2) = z + 1$ und $\dim [\bar{T}_1\,\bar{T}_2] = \bar{n} + 2 - (\bar{r}_1 + \bar{r}_2) = z + 2$.

Es sollen nun die Fälle $z = n + 1 - (r_1 + r_2)$ und $z > n + 1 - (r_1 + r_2)$ getrennt behandelt werden, da ihnen nach (19) verschiedene Typen von z-Systemen entsprechen.

3. 3. 2. *Es sei* $z = n + 1 - (r_1 + r_2)$

Den $\infty^{n-z-1} = \infty^{r_1+r_2-2}$ Räumen R_{z+1} durch $Z = R_z$ stehen $\infty^{r_1+r_2-2}$ Punktepaare P', P'' gegenüber. Alle Punkte eines R_{z+1} durch Z bilden sich auf dasselbe Bildpaar P', P'' ab, denn es ist

$$\dim [R_{z+1} Z_i] = (z + 1) + (n - r_i) - z = n - r_i + 1 = \dim p_i$$

und daher $[R_{z+1} Z_i] = p_i$. Umgekehrt ist auch jedem beliebigen Punktepaar P', P'' ($P^{(i)} \in \Pi_i$, $P^{(i)} \notin O_i$) als Urbildraum ein R_{z+1} durch Z zugeordnet, denn schneidet man die durch P', P'' gehenden p_1 bzw. p_2, so ist

$$\dim (p_1 p_2) = (n - r_1 + 1) + (n - r_2 + 1) - n = n + 2 - (r_1 + r_2) = \\ = z + 1.$$

R_{z+1} enthält dabei Z, da Z in p_i liegt. Wir erhalten also:

(21) *In einem z-System vom Typus* $z = n + 1 - (r_1 + r_2)$ *ist jedes beliebige Punktepaar* P', P'' ($P^{(i)} \in \Pi_i$, *aber* $P^{(i)} \notin O_i$) *Bildpaar eines* R_{z+1} *durch* Z.

Beispiel für ein z-System vom Typus $z = n + 1 - (r_1 + r_2)$. Wählt man im R_3 $r_i = 2$ und $z = 0$, so ist die Voraussetzung erfüllt. Es ist dann $\dim Z_i = \dim \Pi_i = 1$ $(i = 1, 2)$, d. h. die Zentren und Bildräume sind Geraden, wobei sich Z_1 und Z_2 in einem Punkt schneiden. Nach (21) werden die ∞^2 Strahlen des Strahlbündels Z auf die ∞^2 Punktepaare P', P'' der linearen Punktreihen Π_1 und Π_2 abgebildet (Abb. 4). In diesem speziellen System gibt es nur einen einzigen $R_{z+2} = [\overline{T}_1 \overline{T}_2]$, nämlich den Verbindungsraum O der beiden Zentren.

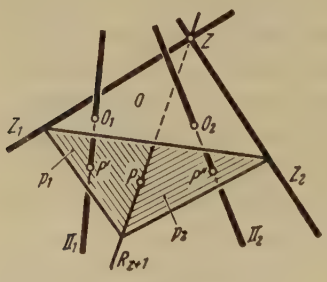

Abb. 4

3. 3. 3. *Es sei* $z > n + 1 - (r_1 + r_2)$

In diesem Falle tritt $p_0 = [O\,P]$ als echter Teilraum des R_n auf, denn aus $\dim O = 2n - (r_1 + r_2 + z)$ und $z > n + 1 - (r_1 + r_2)$ folgt

$$\dim p_0 = \dim [O\,P] = 2n + 1 - (r_1 + r_2 + z) < n.$$

Weiters ist

$$\dim O_i = \dim (O\,\Pi_i) = [2n - (r_i + r_j + z)] + (r_i - 1) - n = n - (r_j + z + 1)$$

und

$$\dim (p_0 \Pi_i) = 2n + 1 - (r_i + r_j + z) + (r_i - 1) - n = n - (r_j + z).$$

(22) Es ist somit

$$\dim p_0 = 2n + 1 - (r_1 + r_2 + z),$$
$$\dim O_i = n - (r_j + z + 1)$$

und

$$\dim (p_0 \Pi_i) = n - (r_j + z).$$

Die Schnitträume O_i und $(p_0 \Pi_i)$ haben nur dann Bedeutung, wenn ihre Dimensionen $\geqq 0$ sind und wenn sie echte Teilräume von Π_i sind. Einerseits ist wegen $\dim p_0 < n$ auch $\dim (O \Pi_i) < \dim (p_0 \Pi_i) < \dim \Pi_i$ und andererseits gilt wegen $n - r_j > z$ die Beziehung

$$\dim (p_0 \Pi_i) > \dim (O \Pi_i) = n - (r_j + z + 1) \geqq 0.$$

$O_i = (O \Pi_i)$ und $(p_0 \Pi_i)$ treten daher als echte Teilräume von Π_i auf. Man erkennt, daß das Bild $P^{(i)}$ eines Punktes P nur innerhalb $(p_0 \Pi_i)$ liegen kann, es fungieren also die $(p_0 \Pi_i)$ durch O_i als Ordner in Π_i. $P^{(j)}$ kann man in Π_j auf $\infty^{r_j - 1}$ Arten wählen, für $P^{(i)}$ gibt es dann nur mehr $\infty^{n - r_j - z}$ mögliche Lagen innerhalb des Ordners in Π_i. Die Anzahl der Punktepaare P', P'', die als Bildpaare von R_n-Punkten P auftreten, reduziert sich also auf $\infty^{r_j - 1} \cdot \infty^{n - r_j - z} = \infty^{n - z - 1}$. Diese Anzahl stimmt nun überein mit der Anzahl der R_{z+1} durch Z.

Beim a-System vom Typus $r_1 + r_2 > n + 2$ traten auch Ordner auf und es mußten sich jeweils entsprechende Ordner in einem Punkt von X schneiden; bei den vorliegenden z-Systemen wurde die Existenz von X nicht vorausgesetzt, wir müssen also eine andere vom Urbildraum unabhängige Beziehung suchen, mit deren Hilfe man zu einem gegebenen Ordner in Π_j den entsprechenden in Π_i finden kann. — Da der Bund O mit p_0 perspektiv liegt zu O_i mit $(p_0 \Pi_i)$, müssen die Bünde O_1 mit $(p_0 \Pi_1)$ und O_2 mit $(p_0 \Pi_2)$ untereinander projektiv[11] sein und dies ist schon die gesuchte Beziehung.

Liegen P' und P'' in entsprechenden Ordnern, so liegen sie auch im selben Oberraum p_0 und dies reicht hin, daß sich p_1 und p_2 in einem R_{z+1} schneiden, denn es ist dann

$$\dim (p_1 p_2) = (n - r_1 + 1) + (n - r_2 + 1) - [2n + 1 - (r_1 + r_2 + z)] = z + 1$$

Daraus ergibt sich:

(23) *In einem z-System vom Typus $z > n + 1 - (r_1 + r_2)$ sind P' und P'' ($P^{(i)} \in \Pi_i$, aber $P^{(i)} \notin O_i$) dann und nur dann Bildpunkte eines*

[11] Vgl. etwa *E. Bertini*, l. c., S. 49 und S. 54.

R_n-Punktes P, wenn sie in entsprechenden Ordnern der projektiven Ordnerbünde O_1 und O_2 liegen. Die Ordner in Π_i haben die Dimension $n - r_j + z$ und enthalten einen festen $R_{n-(r_j+z+1)}$), nämlich O_i.

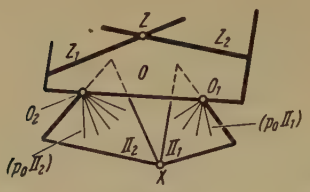

Abb. 5

Beispiel für ein z-System vom Typus $z > n + 1 - (r_1 + r_2)$. Soll Z nicht mit Z_1 zusammenfallen und berücksichtigt man auch (18), so muß man zumindest in den R_4 gehen. Wir wählen also $n = 4$, $r_i = 3$ $(i = 1, 2)$ und $z = 0$; dann ist dim $Z_i = 1$, dim $\Pi_i = 2$, dim $O = 2$, dim $O_i = 0$ und dim $(p_0 \Pi_i) = 1$. Abb. 5 zeigt in einer Skizze die Lage der ausgezeichneten Räume in diesem System.

3.4. x-Systeme

Wir lassen beim a-System die Voraussetzung fallen, daß dim X den kleinsten möglichen Wert habe und ersetzen sie durch

(24) $X = R_x$ mit $\mathrm{Max}\,(0, r_1 + r_2 - (n+1)) \leqq x \leqq \mathrm{Min}\,(r_1 - 1, r_2 - 1)$.

Das neue System möge dann x-System heißen.

Es soll zuerst untersucht werden, welche x-Systeme von den besprochenen Systemen abweichen. — Nach 2. ist durch Z_i und Π_i (i fix) eine P-Projektion bestimmt, wenn man Punktfremdheit von Z_i und Π_i sowie dim Z_i + dim $\Pi_i = n - 1$ voraussetzt. Zu einem gegebenen a-System $Z_i, \Pi_i (i = 1, 2)$ gehören bestimmte Mannigfaltigkeiten von p_i, p_0 und $(p_1\, p_2)$; diese sind in Dimension und Lage nur von Z_1, Z_2 und P, aber nicht von Π_1, Π_2 abhängig. Ersetzt man Π_i durch $\Pi_i{}^*$, wobei dim $\Pi_i{}^* =$ dim Π_i sei und $\Pi_i{}^*$ mit $Z_i{}^* = Z_i$ keine Punkte gemein habe, so bleiben alle Urbildräume fest. Der Typus des a-Systems, soweit er von den Urbildräumen abhängt, bleibt also erhalten. Durch geeignete Wahl von $\Pi_i{}^*$ kann man nun $(\Pi_1{}^*\, \Pi_2{}^*) = R_x$, also ein x-System herstellen. Somit unterscheidet sich ein x-System von einem a-System mit gleichdimensionierten Zentren und Bildräumen höchstens durch die Lage der Bildpaare. Die Lage der Bildpaare kann nur beeinflußt werden, wenn Ordner auftreten, wenn also $r_1 + r_2 > n + 2$ ist (vgl. 3. 2. 4.). Man kann daher alle x-Systeme ausscheiden, für die $r_1 + r_2 \leqq n + 2$ ist, da sie abgesehen von den ∞^x Punkten des R_x, die mit ihren Bildpaaren zusammenfallen, die Eigenschaften gleichdimensionierter a-Systeme haben. In den verbleibenden x-Systemen vom Typus

$r_1 + r_2 > n + 2$ treten nach (13) stets O und p_0 als echte Teilräume des R_n auf. Der Schnittraum $(O\,X)$ existiert, da die Voraussetzung $r_1 + r_2 - (n+1) \leqq x$ zu

$$\dim (O\,X) = [2n + 1 - (r_1 + r_2)] + x - n = n + x + 1 - (r_1 + r_2) \geqq 0$$

führt; um so mehr existiert daher $(p_0 X)$ wegen $\dim (p_0 X) = \dim (O\,X) + 1$. Unmittelbar ist zu erkennen, daß $(O\,X) = (O_1\,O_2)$ ist. Je zwei entsprechende Ordner schneiden sich in einem $R_{n+x+2-(r_1+r_2)}$, nämlich in $(p_0\,X)$. Da O in p_0 liegt, enthält $(p_0\,X)$ den Raum $(O\,X) = R_{n+x+1-(r_1+r_2)}$. Jeder $R_{n+x+2-(r_1+r_2)}$ aus X, der $(O\,X)$ enthält, tritt als Ordnerschnitt auf, da der Verbindungsraum mit O_i die Dimension

$$\dim [(O\,X)\,O_i] =$$

$$= [n+x+2-(r_i+r_j)] + (n-r_i) - [n+x+1-(r_i+r_j)] = n - r_j + 1$$

hat und andererseits jeder R_{n-r_j+1} durch O_i in Π_i ein Ordner ist. Sieht man von der Abbildung der Punkte aus O ab, so gilt:

(25) *In einem x-System vom Typus $r_1 + r_2 > n + 2$ schneiden sich je zwei entsprechende Ordner in einem $R_{n+x+2-(r_1+r_2)}$ von X. Alle $R_{n+x+2-(r_1+r_2)}$ enthalten einen festen $R_{n+x+1-(r_1+r_2)}$, nämlich $(O\,X)$.*

Von Bedeutung ist oft der Sonderfall, daß Π_1 in Π_2 liegt, daß also $x = r_1 - 1$ ist. (25) geht dann über in:

(26) *Ist in einem x-System vom Typus $r_1 + r_2 > n + 2$ der Bildraum Π_1 in Π_2 enthalten, so liegt auch O_1 in O_2 und p_2' in p_1''.*

Beispiel für ein x-System vom Typus $r_1 + r_2 > n + 2$ unter der Voraussetzung $x < r_i - 1$ $(i = 1, 2)$. Das kleinstdimensionierte nicht-

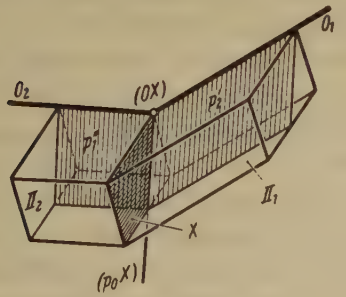

Abb. 6

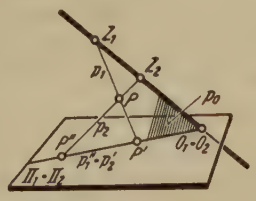

Abb. 7

ausgeartete x-System dieser Art findet man erst im R_5 mit $r_1 = r_2 = 4$ und $x = 2$. Es ist dann $\dim Z_i = 1$, $\dim \Pi_i = 3$, $\dim O = 3$, $\dim O_i = 1$, $\dim p_j^{(i)} = 2$, $\dim (O\,X) = 0$ und $\dim (p_0\,X) = 1$ $(i, j = 1, 2)$. Abb. 6 zeigt in einer Skizze die Situation in den Bildräumen in diesem Beispiel.

Beispiel für ein x-System vom Typus $r_1 + r_2 > n + 2$, wobei Π_1 in Π_2 liege. Wir wählen im R_3 $r_1 = r_2 = 3$ und $x = 2$. Die Projektionszentren sind dann Punkte und die Bildräume sind Ebenen. Wegen $x = 2$ fallen die Bildebenen zusammen, desgleichen auch je zwei entsprechende Ordner sowie die Punkte O_1 und O_2 (Abb. 7).

Nun soll geklärt werden, wie in einem x-System vom Typus $r_1 + r_2 > n + 2$ die Punkte aus O abgebildet werden. Im a-System vom Typus $r_1 + r_2 > n + 2$ werden nach 3. 2. 4. die Punkte aus O durch ein a-System vom Typus $\bar{r}_1 + \bar{r}_2 = \bar{n} + 1$ abgebildet. Führt man, wie vorhin erwähnt, das a-System Π_i, Z_i in ein x-System über, so geht auch das a-System $\overline{\Pi}_i$, $\overline{Z}_i$ in ein x-System über. Dies folgt aus der Tatsache, daß vorher $\dim \overline{X} = -1$ war, während nun $\dim \overline{X} = \dim (O X) \geqq 0$ ist. Es folgt daraus

(27) *In einem x-System vom Typus* $r_1 + r_2 > n + 2$ *erfolgt die Abbildung der Punkte Q aus O durch ein x-System vom Typus* $\bar{r}_1 + \bar{r}_2 = \bar{n} + 1$, *d. h. die Treffgeraden von* Z_1 *und* Z_2 *werden auf die Punktepaare* Q', Q'' $(Q^{(i)} \in O_i)$ *abgebildet.*

3.5. xz-Systeme

Ein Zweibildersystem soll xz-System heißen, wenn O und X den kleinstmöglichen Durchschnitt haben, aber $\dim Z$ und $\dim X$ den Minimalwert überschreiten. Das xz-System unterscheidet sich somit vom a-System durch die Voraussetzung

(28) $Z = R_z$ mit $\operatorname{Max}(0, n + 1 - (r_1 + r_2)) \leqq z \leqq \operatorname{Min}(n - r_1, n - r_2)$, sowie $X = R_x$ mit $\operatorname{Max}(0, r_1 + r_2 - (n + 1)) \leqq x \leqq \operatorname{Min}(r_1 - 1, r_2 - 1)$.

Wie bei den z-Systemen werde auch hier der Fall $z = n - r_i$ (i fix) ausgeschlossen. Auch der Fall $x = r_i - 1$ (i fix) bietet nichts Neues, denn wenn keine Ordner existieren, so ist das xz-System einem gleichdimensionierten z-System gleichwertig, existieren aber Ordner, so sind sie nach (26) inzident. Wir beschränken uns daher auf die Betrachtung des Falles $z < n - r_i$, $x < r_i - 1$ $(i = 1, 2)$. So wie unter 3. 4. gezeigt wurde, daß man aus einem a-System durch andere Wahl der Bildräume ein x-System herstellen kann, so kann man im vorliegenden Fall aus einem z-System ein xz-System herstellen. Da in den z-Systemen vom Typus $z = n + 1 - (r_1 + r_2)$ die Bildpaare nicht an Ordner gebunden sind, folgt daraus, daß im wesentlichen die z-Systeme und xz-Systeme vom Typus $z = n + 1 - (r_1 + r_2)$ gleiche Eigenschaften haben. Die einzige Abweichung bilden die Punkte aus X, die nun mit ihrem Bildpaar zusammenfallen.

Es sei $z > n + 1 - (r_1 + r_2)$

Wie beim z-System ist $\dim O = 2n - (r_1 + r_2 + z)$ und $\dim p_0 = 2n + 1 - (r_1 + r_2 + z)$, weiters $\dim O_i = n - (r_j + z + 1)$ und $\dim p_j^{(i)} = n - (r_j + z)$. Die Forderung $\dim (O\,X) \geqq 0$ führt zu $[2n - (r_1 + r_2 + z)] + x - n \geqq 0$, also zu

$$(29)\quad x - z > r_1 + r_2 - (n + 1),$$

während sich aus der Forderung $\dim (p_0\,X) \geqq 0$ die Bedingung $[2n + 1 - (r_1 + r_2 + z)] + x - n \geqq 0$, also

$$(30)\quad x - z \geqq r_1 + r_2 - (n + 1)$$

ergibt.

Nach (28) ist zwar $x > r_1 + r_2 - (n + 2)$, doch werden die Bedingungen (29) und (30) i. a. nicht erfüllt sein, d. h. das xz-System hat dann die Eigenschaften eines z-Systems mit gleichdimensionierten Zentren und Bildräumen. Es gilt also:

(31) *Ist in einem xz-System vom Typus $z > n + 1 - (r_1 + r_2)$ die Bedingung $x - z \geqq r_1 + r_2 - (n + 1)$ erfüllt, so schneiden sich je zwei entsprechende Ordner in einem $R_{n+x+1-(r_1+r_2+z)}$ von X; gilt $x - z > r_1 + r_2 - (n + 1)$, so gehen diese Ordnerschnitte durch einen festen $R_{n+x-(r_1+r_2+z)}$, nämlich durch $(O\,X)$.*

Die Punkte Q aus O werden nach (20) in allen z-Systemen durch ein a-System vom Typus $\bar{r}_1 + \bar{r}_2 < \bar{n} + 1$, d. h. ohne Ordner, abgebildet; geht man zum xz-System über, so wird aus dem a-System in O ein x-System vom Typus $\bar{r}_1 + \bar{r}_2 < \bar{n} + 1$. Nach 3. 5. unterscheidet sich aber ein solches x-System nur unwesentlich von einem a-System mit gleichdimensionierten Zentren und Bildräumen. Es gilt:

(32) *In einem xz-System werden die Punkte Q aus O durch ein x-System vom Typus $\bar{r}_1 + \bar{r}_2 < \bar{n} + 1$ auf die Punktepaare Q', Q'' $(Q^{(i)} \in O_i)$ abgebildet.*

Beispiel für ein xz-System vom Typus $z > n + 1 - (r_1 + r_2)$. Wir wählen im R_4 $r_i = 3$, $z = 0$ und $x = 1$. Die Zentren sind dann zwei Geraden, die einen Punkt gemein haben. Die Bildräume sind Ebenen, die sich in einer Geraden schneiden. Als Ordner treten Geraden auf; je zwei entsprechende Ordner schneiden sich in einem Punkt von X. Die Ordner in Π_i enthalten den Punkt O_i. Die Situation in den Bildräumen ist also ganz gleich wie beim allgemeinen Zweibilderprinzip im R_3 (vgl. Abb. 1), nur erfüllen jetzt die Urbilder zu einem gegebenen Bildpaar P', P'' eine Gerade durch Z.

In den behandelten Systemen wurde stets vorausgesetzt, daß dim $(O\,X)$ den kleinstmöglichen Wert habe. Die Besonderheiten, die sich ergeben, wenn man diese Voraussetzung fallen läßt, mögen einer späteren Arbeit vorbehalten bleiben.

Ich möchte an dieser Stelle Herrn Prof. Dr. *F. Hohenberg* ergebenst danken, von dem ich die Anregung zu dieser Arbeit empfing und der die Untersuchung durch zahlreiche Ratschläge gefördert hat.

On Regular Measures and Baire Functions

By

Robert E. Zink, Lafayette, Ind., USA

(*Received February 24, 1958*)

1. Introduction. Let X be a topological space and let (X, S, μ) be an associated measure space. Let f be a non-negative measurable (S) function on X. We define the measure v on S by means of the equation

$$v(E) = \int_E f(x)\, d\,\mu(x).$$

It has been shown [3] that, if μ is outer regular, then the necessary and sufficient conditions for the outer regularity of v are: (1) if f is integrable over E, there exists a sequence of measurable open sets $\{U_n\}$ such that E is contained in $\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$ and f is integrable over each U_n; (2) if f is integrable over E and ε and δ are any positive numbers, there exists a measurable open set U containing $E \cap \{x : f(x) = 0\}$ such that $\mu(\{x : f(x) > \delta\} \cap U) < \varepsilon$. Now the second condition appears to be a sort of continuity restriction, and, in fact, it was observed in [3] that, if S is a σ-algebra, then every continuous measurable function satisfies this requirement. It is the purpose of this note to inquire more deeply into the nature of the functions that satisfy this condition. In particular we shall see that the σ-algebra hypothesis of the theorem just quoted is superfluous. However, our principal objective is to show that if S is the σ-ring generated by the class of all compact subsets of X, then, every measurable Baire function satisfying (1) also satisfies (2).

2. Notation and terminology. Throughout the discussion we shall use the symbols (1) and (2) for the two conditions of the introduction. By extended real-valued function, we mean a function which may assume the values $+\infty$ and $-\infty$ as well as real values. If f is an extended real-valued function on a set X, the subsets $\{x : f(x) = 0\}$ and $\{x : f(x) \neq 0\}$ are denoted by $Z(f)$ and $N(f)$ respectively. If S is a subset of X, the characteristic function of S is denoted by χ_S.

A measure μ on a σ-ring, S, of subsets of a topological space is outer regular if and only if $\mu(E) = \inf\{\mu(U) : U \text{ is open, } U \in \mathrm{S}\}$ for each E

belonging to S. The Borel σ-ring of subsets of a topological space X is the σ-ring generated by the class of all compact subsets of X. If S is a subset of the topological space X, we write cl S for the closure of S in X.

3. The Discussion. We begin the discussion by proving an elementary theorem which is an extension of Corollary 5 of [3].

Theorem 1: *If f is upper semi-continuous, as well as non-negative measurable* (S), *μ is an outer regular measure on* S, *and $\nu = \int f d\mu$*, then (1) *is a necessary and sufficient condition for the outer regularity of ν.*

Proof: Since f is upper semi-continuous, each of the sets $U_n = \{x: f(x) < \frac{1}{n}\}$ is open. Let E be any measurable set. Since μ is outer regular, there exists a measurable open set U containing E. Let $V_n = U_n \cap U$. Then each V_n is measurable and open and contains $E \cap Z(f)$. Thus, it is clear that there exists for each positive δ a measurable open set V containing $E \cap Z(f)$ and such that $\{x: f(x) > \delta\} \cap V = \phi$. In particular, (2) is satisfied, and the theorem is proved.

We now prove a sequence of lemmas which leads up to the principal theorem.

Lemma 2: *Let ν be a measure on the Borel subsets of X. Let E and F be measurable sets satisfying*: (i) *$E \cup F$ is contained in a measurable open set U*; (ii) *if V is a measurable open set containing F, then $\nu(E \cap V) > \eta > 0$. Then, for every measurable set A, with $\nu(A) < \eta$, $F \cap cl(E - A) \neq \phi$.*

Proof: Let A be measurable set satisfying $\nu(A) < \eta$. If the proposition were false, there would exist, for each x in F, an open set V_x containing x and disjoint from $E - A$. Let $W = \bigcup_{x \in F} V_x$ and $V = W \cap U$. Then V is open and contains F. Since V is an open subset of the Borel set U, it is itself measurable [1, p. 219]. But $V \cap (E - A) = \varnothing$; hence

$$\nu(E \cap V) = \nu(E - A) \cap V) + \nu(A \cap V) = \nu(A \cap V) \leq \nu(A) < \eta.$$

Since this contradicts (ii), our assumption is false, and the lemma is proved.

Definition 3: Let X be an arbitrary topological space. Designate by B_0 the class of all extended real-valued continuous functions on X. Let B_1 denote the class of all discontinuous functions which are limits of pointwise convergent sequences of functions of class 0. Proceeding inductively, corresponding to an arbitrary ordinal $\alpha < \Omega$ (the first uncountable ordinal), let F_α be the class of all functions which are limits of pointwise convergent sequences of functions taken from $\bigcup_{\beta < \alpha} B_\beta$,

and let $B_\alpha = F_\alpha - \bigcup_{\beta<\alpha} B_\beta$. A function is a Baire function if and only if it is an element of one of the above classes B_α.

(We observe that the Baire functions may be described as the elements of the smallest class of extended real-valued functions which contains the continuous functions and which contains the limit of every pointwise convergent sequence of functions in it.)

Lemma 4: *If* $\mathcal{S}$ *is the* σ*-ring of Borel subsets of* X, f *is a Baire function on* X, *and* U *is a measurable open set, then* $f\chi_U$ *is measurable* $(\mathcal{S})$.

Proof: If f is a continuous function and c is a real number, then $N(f)$ and $\{x : f(x) < c\}$ are open sets. Consequently, $\{x : f\chi_U(x) < c\} \cap N(f\chi_U) = \{x : f(x) < c\} \cap N(f) \cap U$ is an open subset of U, and is therefore measurable. Thus, the proposition is valid for functions of class 0. Now suppose that the lemma has been established for the functions of each class B_α with $\alpha < \beta$. Let f be an element of B_β, say $f = \lim_{n\to\infty} f_n$, where f_n belongs to B_{α_n}, with $\alpha_n < \beta$. Then, $f\chi_U = \lim_{n\to\infty} f_n\chi_U$, and the measurability of $f\chi_U$ is established. By the principle of transfinite induction the lemma is proved.

Lemma 5: *Let* ν *be a measure on* $\mathcal{S}$, *the* σ*-ring of Borel subsets of* X, *and let* E *and* U *be measurable sets such that* U *is open,* $E \subset U$, *and* $\nu(U) < +\infty$. *If* f *is a Baire function satisfying* $E \subset \{x : f(x) > \delta\}$ *for some real number* δ, *then corresponding to arbitrary* $\eta > 0$ *there exists a measurable set* A *such that* $\nu(A) < \eta$ *and* $f[cl(E - A)] \subset [\delta, +\infty]$.

Proof: Once again, the argument depends on the principle of transfinite induction. The proposition is certainly true for Baire functions of class 0. Now suppose that the lemma has been established for the Baire functions of each class B_α with $\alpha < \beta$. Let f be an element of B_β and let E and U be elements of $\mathcal{S}$ such that $E \subset U$, U is open, $\nu(U) < +\infty$, and such that $E \subset \{x : f(x) > \delta\}$ for a given real number δ. Let $g = f \wedge (1 + \delta)$. Then, g is a Baire function of class $\gamma \leq \beta$ (see, for example [2, p. 35]), and $E \subset \{x : g(x) > \delta\}$. Suppose $\gamma < \beta$, then there exists for each positive η a corresponding measurable set A such that $\nu(A) < \eta$ and $g[cl(E-A)] \subset [\delta, +\infty)$. But $f(x) \geqq g(x)$ for all x in X; hence, $f[cl(E-A)] \subset [\delta, +\infty]$. On the other hand, if $\gamma = \beta$, then, by definition of the Baire classes, $g = \lim_{n\to\infty} f_n$ where f_n belongs to B_{α_n} with $\alpha_n < \beta$. Thus, a fortiori, we must have $g\chi_U = \lim_n f_n\chi_U$. Since $g\chi_U$ is real-valued on E and since each f_n may be assumed to be real-valued [2, p. 35] and in view of lemma 4, we may apply Egoroff's

theorem to find A_0, a measurable subset of E with $v(A_0) < \frac{\eta}{2}$, such that $f_n \chi_U$ converges uniformly to $g \chi_U$ on $E - A_0$. Thus, corresponding to arbitrary $k > 1$, there exists an N such that $f_n(x) > \delta(1 - k^{-1})$ for all $n \geqq N$ and all x in $E - A_0$. Applying the induction hypothesis to $E - A_0$ and each f_n with $n \geqq N$, there exists a measurable set A_n such that $v(A_n) < \frac{\eta}{2^{n+1}}$ and $f_n[cl((E - A_0) - A_n)] \subset [\delta(1 - k^{-1}), + \infty)$. Let $A = \bigcup_{n=N}^{\infty} A_n \cup A_0$. Then $v(A) < \eta$, $f_n[cl(E - A)] \subset [\delta(1 - k^{-1}), + \infty)$, for $n \geqq N$ and, as a result, $g[cl(E - A)] \subset [\delta(1 - k^{-1}), + \infty)$. Since k may be taken to be arbitrarily large, it follows that $g[cl(E - A)] \subset [\delta, + \infty)$. Since $f(x) \geqq g(x)$ for all x in X, it follows that $f[cl(E - A)] \subset [\delta, + \infty]$, and the lemma is established.

Theorem 6: *If f is a non-negative, Borel measurable Baire function and μ is an outer regular measure on* S, *the σ-ring of Borel subsets of X, then* (1) *is a necessary and sufficient condition for the outer regularity of $v = \int f d\mu$.*

Proof: In view of the theorem stated in the introduction, we need only show that condition (2) is satisfied.

Let B be a Borel set over which f is integrable, let $\{U_n\}$ be a countable covering of B by measurable open sets, over each of which f is also integrable, and let $B_n = B \cap U_n$. We show first that if ε and δ are any positive numbers and n is a positive integer, then there exists a measurable open set V containing $B_n \cap Z(f)$ and satisfying $\mu(\{x : f(x) > \delta\} \cap V) < \varepsilon$. Suppose, on the contrary, that there are positive numbers ε and δ and a positive integer N such that $\mu(\{x : f(x) > \delta\} \cap V) \geqq \varepsilon$ for each measurable open set V containing $B_N \cap Z(f)$. Let $E = \{x : f(x) > \delta\} \cap U_N$, and let $\eta = \delta \varepsilon$. By lemma 5, there exists a measurable set A such that $v(A) < \eta$ and $f[cl(E - A)] \subset [\delta, + \infty]$. But according to lemma 2, there exists in $B_N \cap Z(f)$ a limit point of $E - A$. Since this is an obvious contradiction, the assertion is proved. Thus, if ε and δ are any positive numbers, we may choose for each positive integer n, a measurable open set V_n containing $B_n \cap Z(f)$ and satisfying the condition $\mu(\{x : f(x) > \delta\} \cap V_n) < \frac{\varepsilon}{2^n}$. Certainly $V = \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n$ is open and measurable while $B \cap Z(f) \subset V$. Since $\mu(\{x : f(x) > \delta\} \cap V) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(\{x : f(x) > \delta\} \cap V_n) < \varepsilon$, the proof of the theorem is complete.

Since we have proved (theorem 1), in the case of continuous functions, that one does not require the Borel σ-ring hypothesis, it is natural to

inquire whether this restriction can be eliminated entirely. It is easy to construct examples to show that this is not the case. We give one here in the interests of completeness.

Example 7: Let $X = [0, 2]$, topologized in the usual manner. Let S be the σ-ring consisting of the four sets $\varnothing$, $[0, 1]$, $(1, 2]$, X, and let $\mu([0, 1]) = \mu(X) = +\infty$, $\mu((1, 2]) = 1$. It is clear that μ is an outer regular measure on S. Finally, let $f = \chi_{(1, 2]}$. Certainly f is a Baire function of class 1, while $v = \int f \, d\mu$ is not outer regular.

Finally we observe that a Borel measurable Baire function need not satisfy (2) in the absence of condition (1).

Example 8: Let $X = [0, 1]$ with the ordinary topology, let $\mathfrak{S}$ be the σ-ring of Borel subsets of X, and let μ be the outer regular measure defined on S as follows: $\mu(E) = \int_E \frac{1}{x} \, dm(x)$, if $0 \notin E$; $\mu(\{0\}) = +\infty$, where m is the Lebesgue measure on $\mathfrak{S}$. Consider the (measurable) Baire function $f = \chi_{(0, 1]}$. Let $B = \{0\}$ and $\delta = \frac{1}{2}$. Then, if V is open and $0 \in V$, there exists a positive number α (≤ 1) such that $\{x : f(x) > \frac{1}{2}\} \cap V \supset (0, \alpha)$. Hence, $\mu(\{x : f(x) > \frac{1}{2}\} \cap V) \geqq \mu((0, \alpha)) = +\infty$, and condition (2) fails to hold. To show that condition (1) is not satisfied, note that f is integrable over B while any open covering of B can be reduced to a covering consisting of only one (open) set, over which, of course, f is not integrable.

Theorem 1 shows that we cannot hope to find such an example among the functions of B_0: the function f given above is an element of B_1.

References

1. *Paul R. Halmos*, Measure Theory, New York, 1950.

2. *C. de la Vallée Poussin*, Intégrales de Lebesgue, fonctions d'ensemble classes de Baire, Paris, 1916.

3. *Robert E. Zink*, A note concerning regular measures, Duke Math. J., **24** (1957), 127—136.

Generalized Legendre's Associated Functions (Integral Theorems, Recurrence Formulas)

By

L. Kuipers, Delft

(*Received February 26, 1958*)

1. In the present note we derive some properties on the class of generalized Legendre's associated functions introduced by *Meulenbeld* and the author in [1]. Many integral theorems and recurrence formulae can be established, and what is presented in the following sections is only a choice.

The functions mentioned above are the specified linearly independent solutions $P_k^{m,n}(z)$ and $Q_k^{m,n}(z)$ of the differential equation

$$(1-z^2)\frac{d^2w}{dz^2}-2z\frac{dw}{dz}+\left\{k(k+1)-\frac{m^2}{2(1-z)}-\frac{n^2}{2(1+z)}\right\}w=0, \qquad (1)$$

where primarily z is thought of as a complex variable not lying in the part $(-\infty, 1)$ of the real axis. In [1] the following representation was deduced:

$$P_k^{m,n}(z)=\frac{1}{\Gamma(1-m)}\frac{(z+1)^{n/2}}{(z-1)^{m/2}}F\left(k-\frac{m-n}{2}+1,-k-\frac{m-n}{2};1-m;\frac{1-z}{2}\right), \qquad (2)$$

and this formula is the startingpoint of section 2.

2. For real values of z lying in the interval $-1<x<1$ we introduce as a solution of the differential equation (1) the function $P_k^{m,n}(x)$ defined by

$$P_k^{m,n}(x)=\tfrac{1}{2}\{e^{\frac{1}{2}m\pi i}P_k^{m,n}(x+i\,0)+e^{-\frac{1}{2}m\pi i}P_k^{m,n}(x-i\,0)\}, \qquad (3)$$

quite analogous to the way this is done in the theory of the Legendre functions.

According to the expression (2) for $P_k^{m,n}(z)$ it can easily be seen that

$$P_k^{m,n}(x)=\frac{1}{\Gamma(1-m)}\frac{(1+x)^{n/2}}{(1-x)^{m/2}}F\left\{k-\frac{m-n}{2}+1,-k-\frac{m-n}{2};1-m;\frac{1-x}{2}\right\} \qquad (4)$$

Now for $k \neq l$ it follows from the equations

$$(1-x^2)\frac{d^2w}{dx^2} - 2x\frac{dw}{dx} + \left\{k(k+1) - \frac{m^2}{2(1-x)} - \frac{n^2}{2(1+x)}\right\} w = 0$$

$$(1-x^2)\frac{d^2w}{dx^2} - 2x\frac{dw}{dx} + \left\{l(l+1) - \frac{m^2}{2(1-x)} - \frac{n^2}{2(1+x)}\right\} w = 0$$

that

$$\frac{d}{dx}\left\{(1-x^2)\left(P_l^{m,n}(x)\frac{d}{dx}P_k^{m,n}(x) - P_k^{m,n}(x)\frac{d}{dx}P_l^{m,n}(x)\right)\right\} + \\ + (k-l)(k+l+1)P_k^{m,n}(x)P_l^{m,n}(x) = 0.$$

Integration between -1 and 1 yields

$$\int_{-1}^{1} P_k^{m,n}(x)\,P_l^{m,n}(x)\,dx = 0 \qquad (k \neq l). \tag{5}$$

Now suppose that the eight numbers $k \pm \frac{m \pm n}{2}$ and $l \pm \frac{m \pm n}{2}$ are positive integers. According to [1] (13) we replace the expression on the right of (4) by

$$P_k^{m,n}(x) = \frac{(1+x)^{n/2}(1-x)^{m/2}}{2^m\,\Gamma(m+1)} \cdot \frac{\Gamma(k+\frac{m+n}{2}+1)}{\Gamma(k-\frac{m-n}{2}+1)} \cdot \frac{\Gamma(k+\frac{m-n}{2}+1)}{\Gamma(k-\frac{m+n}{2}+1)} \cdot \\ F\left(k+\frac{m+n}{2}+1,\ -k+\frac{m+n}{2};\ m+1;\ \frac{1-x}{2}\right). \tag{6}$$

Following an argument used by *Barnes* [2] and putting

$$(a)_0 = 1,\ (a)_s = a(a+1)\ldots(a+s-1) \qquad (s = 1, 2, \ldots),$$

we observe that the hypergeometric function on the right of (6) is the same as

$$\sum_{s=0}^{k-\frac{m+n}{2}} \frac{(k+\frac{m+n}{2}+1)_s\,(-k+\frac{m+n}{2})_s}{(m+1)_s\,\Gamma(s+1)}\left(\frac{1-x}{2}\right)^s,$$

thus (6) can be replaced by

$$P_k^{m,n}(x) = \frac{(1+x)^{n/2}\,(1-x)^{m/2}}{2^m} \cdot \frac{\Gamma\left(k+\frac{m-n}{2}+1\right)}{\Gamma\left(k-\frac{m-n}{2}+1\right)} \cdot$$

$$\sum_{s=0}^{k-\frac{m+n}{2}} (-1)^s \frac{\Gamma\left(k+\frac{m+n}{2}+1+s\right)}{\Gamma(m+1+s)\,\Gamma(s+1)\,\Gamma\left(k-\frac{m+n}{2}+1-s\right)} \left(\frac{1-x}{2}\right)^s, \quad (7)$$

and since $\lim_{\zeta \to s} (\zeta - s)\,\Gamma(-\zeta) = \frac{(-1)^{s+1}}{s!}$ we find for (7) by Cauchy's theorem

$$\left.\begin{aligned} P_k^{m,n}(x) = & \frac{-\Gamma\left(k+\frac{m-n}{2}+1\right)}{\Gamma\left(k-\frac{m-n}{2}+1\right)} \cdot \frac{1}{2^{m+1}\pi i} \cdot (1+x)^{n/2}\,(1-x)^{m/2} \cdot \\ & \oint \frac{\Gamma\left(k+\frac{m+n}{2}+1+\zeta\right)\Gamma(-\zeta)}{\Gamma(m+1+\zeta)\,\Gamma\left(k-\frac{m+n}{2}+1-\zeta\right)} \left(\frac{1-x}{2}\right)^{\zeta} d\zeta, \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

where the integral is taken along a contour including the poles $\zeta = 0, 1, \ldots, k - \frac{m+n}{2}$. Hence

$$\int_{-1}^{1} P_k^{m,n}(x)\,P_l^{m,n}(x)\,dx = \frac{-1}{2^{m-n+2}\pi^2} \cdot \frac{\Gamma\left(k+\frac{m-n}{2}+1\right)}{\Gamma\left(k-\frac{m-n}{2}+1\right)} \cdot \frac{\Gamma\left(l+\frac{m-n}{2}+1\right)}{\Gamma\left(l-\frac{m-n}{2}+1\right)} \cdot$$

$$\oint\oint \frac{\Gamma\left(k+\frac{m+n}{2}+1+\zeta\right)\Gamma(-\zeta)}{\Gamma\left(k-\frac{m+n}{2}+1-\zeta\right)\Gamma(m+1+\zeta)} \cdot \frac{\Gamma\left(l+\frac{m+n}{2}+1+\nu\right)\Gamma(-\nu)}{\Gamma\left(l-\frac{m+n}{2}+1-\nu\right)\Gamma(m+1+\nu)} \cdot$$

$$\int_{-1}^{1} \left(\frac{1+x}{2}\right)^n \left(\frac{1-x}{2}\right)^{m+\zeta+\nu} dx\,d\zeta\,d\nu. \quad (9)$$

We perform the integration with respect to x, and then we introduce new variables

$$\zeta = \xi - \frac{m+n}{2} - 1$$

$$\nu = \eta - \frac{m+n}{2} - 1.$$

The double integral occurring in (9) is except for a factor $2\,\Gamma(n+1)$ equal to

$$\oint\oint \frac{\Gamma(k+\xi)\,\Gamma(l+\eta)}{\Gamma(\xi+\frac{m-n}{2})\,\Gamma(\eta+\frac{m-n}{2})} \cdot \frac{\Gamma(\frac{m+n}{2}+1-\xi)\,\Gamma(\frac{m+n}{2}+1-\eta)}{\Gamma(k-\xi+2)\,\Gamma(l-\eta+2)} \cdot$$

$$\frac{\Gamma(\xi+\eta-n-1)}{\Gamma(\xi+\eta)}\,d\xi\,d\eta, \text{ or, } \oint \frac{\Gamma(l+\eta)\,\Gamma(\frac{m+n}{2}+1-\eta)}{\Gamma(\eta+\frac{m-n}{2})\,\Gamma(l-\eta+2)}\,d\eta\,.$$

$$\oint \frac{\Gamma(k+\xi)\,\Gamma(\frac{m+n}{2}+1-\xi)\,\Gamma(\xi+\eta-n-1)}{\Gamma(\xi+\frac{m-n}{2})\,\Gamma(k-\xi+2)\,\Gamma(\xi+\eta)}\,d\xi.$$

The poles of the integrand of the last integral are

$$\xi = \frac{m+n}{2}+1, \frac{m+n}{2}+2, \ldots, k \text{ and } \xi = 1-\eta, 2-\eta, \ldots, n+1-\eta.$$

Now this integral (with respect to ξ) vanishes when taken round an infinitely large contour, hence in our case the integral is equal to $-2\pi i$. Σ residues in the points $1-\eta, \ldots, n+1-\eta =$

$$-2\pi i \sum_{r=0}^{n} \frac{\Gamma(k-\eta+r+1)\,\Gamma(\frac{m+n}{2}+\eta-r)}{\Gamma(-\eta+\frac{m-n}{2}+r+1)\,\Gamma(k+\eta-r+1)} \cdot \frac{(-1)^{n-r+1}}{\Gamma(r+1)\,\Gamma(n-r+1)}.$$

There remains to be evaluated

$$-2\pi i \sum_{r=0}^{n} \oint (-1)^{r-r+1} \frac{\Gamma(l+\eta)\,\Gamma(\frac{m+n}{2}+1-\eta)}{\Gamma(\eta+\frac{m-n}{2})\,\Gamma(l-\eta+2)} \cdot$$

$$\frac{\Gamma(k-\eta+r+1)\,\Gamma(\frac{m+n}{2}+\eta-r)}{\Gamma(-\eta+\frac{m-n}{2}+r+1)\,\Gamma(k+\eta-r+1)} \cdot \frac{d\eta}{\Gamma(r+1)\,\Gamma(n-r+1)}$$

Poles are $\eta = \frac{m+n}{2}+1, \frac{m+n}{2}+2, \ldots, l+1.$

Put $\eta = \alpha + \frac{m+n}{2}+1$, and replace r by $n-r$, then the last expression is transformed into

$$-2\pi i \sum_{r=0}^{n} \frac{(-1)^{r+1}}{r!(n-r)!} \oint \frac{\Gamma(l+\frac{m+n}{2}+1+\alpha)}{\Gamma(m+1+\alpha)} \cdot \frac{\Gamma(m+\alpha+r+1)}{\Gamma(k+\frac{m-n}{2}+\alpha+r+2)} \cdot$$

$$\frac{\Gamma(-\alpha)}{\Gamma(1+l-\frac{m+n}{2}-\alpha)} \cdot \frac{\Gamma(k-\frac{m-n}{2}-r-\alpha)}{\Gamma(-r-\alpha)}\, d\alpha. \tag{10}$$

If $l < k$, then there are no poles, and the integral in (10) vanishes. The same holds if $l > k$.

Now assume that $k = l$. Then the only pole of the integrand of (10) is when $r = n$ for $\alpha = k - \frac{m+n}{2}$. Thus the value of (10) is equal to

$$4\pi^2 \frac{(-1)^{n+1}}{n!} \frac{\Gamma(2k+1)}{\Gamma(k+\frac{m-n}{2}+1)} \frac{\Gamma(k+\frac{m+n}{2}+1)}{\Gamma(2k+2)} \cdot \frac{\Gamma(-k+\frac{m+n}{2})}{\Gamma(-k+\frac{m-n}{2})} =$$

$$\frac{-4\pi^2}{n!} \frac{1}{2k+1} \frac{\Gamma(k+\frac{m+n}{2}+1)}{\Gamma(k+\frac{m-n}{2}+1)} \cdot \frac{\Gamma(k-\frac{m-n}{2}+1)}{\Gamma(k-\frac{m+n}{2}+1)}.$$

Finally we have from the last result, (9) and (10)

$$\int_{-1}^{1} \{P_k^{m,n}(x)\}^2 dx = \frac{1}{2^{m-n-1}} \cdot \frac{1}{2k+1} \cdot$$

$$\frac{\Gamma(k+\frac{m-n}{2}+1)}{\Gamma(k-\frac{m-n}{2}+1)} \cdot \frac{\Gamma(k+\frac{m+n}{2}+1)}{\Gamma(k-\frac{m+n}{2}+1)}. \tag{11}$$

3. If in the wellknown relation

$$c(c-1)(\zeta-1)F(a,b;c-1;\zeta) + c[c-1-(2c-a-b-1)\zeta]F(a,b;c;\zeta) + \\ + (c-a)(c-b)\zeta F(a,b;c+1;\zeta) = 0 \tag{12}$$

we set $a = k - \frac{m-n}{2} + 1$, $b = -k - \frac{m-n}{2}$, $c = 1-m$, $\zeta = \frac{1-z}{2}$, then according to (2) it is easily seen that (12) gives rise to a recurrence formula for the $P_k^{m,n}$ function. After some calculation we find

$$\left.\begin{aligned} &P_k^{m+1,n+1}(z) + \{m-n+(m+n)z\}(z^2-1)^{-\frac{1}{2}} P_k^{m,n}(z) - \\ &- (k+\frac{m+n}{2})(k-\frac{m+n}{2}+1) P_k^{m-1,n-1}(z) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Another recurrence formula can be derived by making use of the relations

$$cF(a,b-1;c;\zeta) - cF(a-1,b;c;\zeta) + (a-b)\zeta F(a,b;c+1;\zeta) = 0 \tag{14}$$

$$c(a-b)F(a,b;c;\zeta) - a(c-b)F(a+1,b;c+1;\zeta) + \\ b(c-a)F(a,b+1;c+1;\zeta) = 0 \tag{15}$$

(see [43], p. 36, (1), (2)).

Replace each of the last two hypergeometrie functions occurring in (15) by an expression found from (14) in which first a and b are changed into $a+1$ and $b+1$ respectively. In the result we set

$$a = k - \frac{m-n}{2} + 1, b = -k - \frac{m-n}{2}, c = 1-m, \zeta = \frac{1-z}{2}.$$

Again we make use of (2) and after some calculation we get

$$\left.\begin{aligned}&\{2k(k+1)(2k+1)z+\tfrac{1}{2}(m^2-n^2)(2k+1)\}P_k^{m,n}(z)=\\&=2k(k-\frac{m-n}{2}+1)(k-\frac{m+n}{2}+1)P_{k+1}^{m,n}(z)+\\&+2(k+1)(k+\frac{m-n}{2})(k+\frac{m+n}{2})P_{k-1}^{m,n}(z).\end{aligned}\right\}\qquad(16)$$

Remarks.

1. Because of (3), which implies

$$e^{\frac{1}{2}m\pi i}P_k^{m,n}(x+i0)=e^{-\frac{1}{2}m\pi i}P_k^{m,n}(x-i0)=P_k^{m,n}(x)\quad(-1<x<1),$$

it follows that (13) and (16) are also valid when z is chosen on the crosscut $(-1, 1)$.

2. It is not difficult to show that (13) and (16) hold for the $Q_k^{m,n}(z)$. For instance, one may use the next formula (see [4], (24))

$$Q_k^{m,n}(z)=\frac{\pi e^{\pi i m}}{2\sin(k+\frac{m+n}{2})\pi}\left[e^{\mp\pi i(k-\frac{m-n}{2})}P_k^{m,n}(z)-\right.$$

$$\left.-e^{\pm\frac{m-n}{2}\pi i}\frac{\Gamma(k+\frac{m-n}{2}+1)}{\Gamma(k-\frac{m-n}{2}+1)}\cdot\frac{1}{2^{m-n}}P_k^{n,m}(-z)\right],$$

and from this relation, (13) and (16), the desired results can be derived.

3. From (13) and (5) follows by multiplication and integration $\int_{-1}^{1}\{2k(k+1)(2k+1)x+\frac{1}{2}(m^2-n^2)(2k+1)\}(P_k^{m,n}(x))^2\,dx=0$, or,

$$\int_{-1}^{1}x\{P_k^{m,n}(x)\}^2dx=-\frac{(m^2-n^2)\,\Gamma(k+\frac{m-n}{2}+1)\,\Gamma(k+\frac{m+n}{2}+1)}{2^{m-n+1}k(k+1)(2k+1)\,\Gamma(k-\frac{m-n}{2}+1)\,\Gamma(k-\frac{m+n}{2}+1)}\qquad(17)$$

In the case of the ordinary Legendre's associated functions (17) leads to a trivial result.

4. Another integral theorem, derived from (16) and (5) by multiplication and integration is

$$\int_{-1}^{1} \{2\,k(k+1)\,(2\,k+1)\,x + \tfrac{1}{2}\,(m^2-n^2)\,(2\,k+1)\}\,P_k^{m,n}(x)\,P_{k+1}^{m,n}(x)\,dx =$$

$$= 2\,k(k-\frac{m-n}{2}+1)\,(k-\frac{m+n}{2}+1)\int_{-1}^{1}\{P_{k+1}^{m,n}(x)\}^2\,dx, \text{ or,}$$

$$\int_{-1}^{1} x\,P_k^{m,n}(x)\,P_{k+1}^{m,n}(x)\,dx =$$

$$\frac{1}{(k+1)\,(2\,k+1)\,(2\,k+3)}\;\frac{1}{2^{m-n-1}}\cdot\frac{\Gamma(k+\frac{m-n}{2}+2)\,\Gamma(k+\frac{m+n}{2}+2)}{\Gamma(k-\frac{m-n}{2}+1)\,\Gamma(k-\frac{m+n}{2}+1)}. \tag{18}$$

For $m = n$, (18) becomes

$$\int_{-1}^{1} x\,P_k^m(x)\,P_{k+1}^m(x)\,dx = \frac{2\,\Gamma(k+m+2)}{(k+1)\,(2\,k+1)\,(2\,k+3)\,\Gamma(k-m+1)}.$$

References

[1] *L. Kuipers* and *B. Meulenbeld*: On a generalization of Legendre's associated differential equation I, II, Proc. Kon. Ned. Ak. v. W., Amsterdam, Series A, **60**, No 4, pp. 436—450.

[2] *E. W. Barnes*: On generalized Legendre functions, Quart. J. Math. Oxford Ser. **39** (1908), pp. 97—204.

[3] *T. M. MacRobert*: On recurrence formulae, Proc. Glasgow Math. Ass., **III** (1956), part I, pp. 36—37.

[4] *L. Kuipers* and *B. Meulenbeld*: Related generalized Legendre's associated functions (to be published).

Die Vollständigkeit der funktionentheoretischen Invarianten kongruenter Kreisbogenecken

Von

Helmut Unkelbach, Bonn

(*Eingegangen am 27. Februar 1958*)

Wir bezeichnen mit $\{z, \zeta\}$ den Schwarzschen Differentialausdruck und betrachten eine Differentialgleichung der Gestalt

$$\{z, \zeta\} = \frac{a_k}{\zeta^k} + \frac{a_{k-1}}{\zeta^{k-1}} + \ldots + \frac{a_1}{\zeta} + P(\zeta), \quad a_k \neq 0, \tag{1}$$

wobei die Koeffizienten $a_k, a_{k-1}, \ldots a_1$ reell sind und die Funktion $P(\zeta)$ im Kreise $|\zeta| < \varepsilon$ regulär und für $-\varepsilon < \zeta < \varepsilon$ reell ist. Ist die Funktion $z = f(\zeta)$ eine Lösung von (1), dann bildet sie den Halbkreis $|\zeta| < \varepsilon$, $\Im(\zeta) > 0$ auf eine „Umgebung" einer verallgemeinerten Kreisbogenecke $E^{(k,l)}$ ab, welche die Ordnung k und die Art l besitzt, wobei[1]

$$l = 1 \text{ für } a_k < 0, \quad l = 2 \text{ für } a_k > 0. \tag{2}$$

Für alle geraden Werte von k wurde ein Winkel $W^{(k,l)}$ von $E^{(k,l)}$ definiert, und $W^{(k,l)}$ dargestellt als eine Funktion

$$W^{(k,l)} = F_k(a_k, a_{k-1}, \ldots, a_{m+1}), \tag{3}$$
$$m = k/2.$$

Das Bildungsgesetz dieser Funktion F_k ist in [4] und [5] beschrieben. Dabei ist die Art l durch den Funktionswert von F_k für $W^{(k,l)} \neq 0$ eindeutig bestimmt, da für $l = 1$ der Wert von F_k reell, für $l = 2$ der Wert von F_k rein imaginär ist.

In [3], Seite 329 wurde definiert, in welchen Fällen zwei Ecken $E_1^{(k,l)}$ und $E_2^{(k,l)}$ kongruent heißen sollen. Es handelt sich um einen

[1] Vgl. [2] und [3]. Das Vorzeichen von a_k ist entsprechend der Arbeit [2] gewählt, d. h. anders als in [4] und [5]. Zur Abkürzung sagen wir, die Ecke $E^{(k,l)}$ „gehört" zu den Koeffizienten $a_k, a_{k-1}\, a_1$. Im folgenden bezeichnen wir mit $P_\mu(\zeta)$ durchweg Funktionen, welche in einem Kreise $|\zeta| < \varepsilon$ regulär und für $-\varepsilon < \zeta < \varepsilon$ reell sind.

verallgemeinerten Kongruenzbegriff, wobei durch eine Möbiussche Transformation der einen Ecke eine Euklidische Kongruenz hergestellt werden kann („Möbius-Kongruenz").

Die Funktionen (3) sind Invarianten kongruenter Ecken, d. h. daß die Funktionen für kongruente Ecken denselben Wert annehmen. Für ungerades k hat sich bisher keine Analogie zu (3) ergeben. Für beliebiges endliches k wurde außer (3) nur noch die Invariante

$$F_k^0(a_k) = \frac{a_k}{|a_k|}, \tag{4}$$

abgeleitet, welche die Art l bestimmt.

Da die Invarianten (3) und (4) eine geometrische Bedeutung besitzen, interessiert die Frage, welche weiteren Invarianten es noch gibt. Wir fragen also nach weiteren Funktionen

$$G(a_k, a_{k-1}, \ldots, a_1),\ a_k \neq 0,$$

welche für kongruente Ecken dieselben Werte annehmen. Es stellt sich heraus, daß es „im wesentlichen" keine weiteren Invarianten gibt, und zwar entsprechend dem folgenden

Hauptsatz

Ist $G(a_k, a_{k-1}, \ldots, a_1)$ eine eindeutige komplexe Funktion der Koeffizienten $a_k, \ldots, a_1, a_k \neq 0$, welche für kongruente Ecken dieselben Werte annimmt, dann läßt sich G darstellen als

$$G = H(F_k, F_k^0) \text{ für gerades } k, \tag{A}$$

$$G = H(F_k) \text{ für gerades } k,\ F_k \neq 0 \tag{B}$$

$$G = H(F_k^0) \text{ für ungerades } k, \tag{C}$$

wo H eine Funktion der Invarianten F_k bzw. F_k^0 bedeutet.[2]

Folgerung aus dem Hauptsatz: Sowohl die Theorie der geradlinigen Polygone als auch der Kreisbogenpolygone legt es nahe, von einem Winkel zu verlangen, daß er sich als Funktion der Koeffizienten des betreffenden Hauptteiles der Differentialgleichung darstellen läßt, welcher die Abbildungsfunktion genügt. Weiter wird von einem Winkel sinngemäß gefordert, daß er für kongruente Ecken denselben Wert hat und daß er bei festem k und l verschiedene Werte annehmen kann.

[2] Es ist bemerkenswert, daß für die Funktion G weder die Voraussetzung der Stetigkeit noch sonst eine weitere Voraussetzung erforderlich ist.

Auf der Grundlage dieser Forderungen ergeben sich aus unserem Satz die beiden Folgerungen:

I. *Ecken ungerader Ordnung besitzen keine Winkel.*

II. *Ecken gerader Ordnung besitzen „im wesentlichen" keine anderen Winkel, als sie in* [3] *und* [5] *definiert sind.*

Der Beweis des Hauptsatzes ergibt sich aus dem folgenden

Hilfssatz

$E^{(k,l)}$ und $E_1^{(k,l)}$ seien zwei beliebige Ecken derselben Ordnung und Art. Eine Funktion $z = f(\zeta)$, welche eine „Umgebung" von $E^{(k,l)}$ auf den Halbkreis $|\zeta| < \varepsilon$, $\Im(\zeta) > 0$ und die Eckenelemente auf den Punkt $\zeta = 0$ abbildet („Abbildungsfunktion" der Ecke), möge die Differentialgleichung (1) erfüllen. Ist k ungerade, dann gibt es eine zu $E_1^{(k,l)}$ kongruente Ecke $E_2^{(k,l)}$, deren Abbildungsfunktion $z = f_2(\zeta)$ eine Differentialgleichung der folgenden Gestalt erfüllt:

$$\{z, \zeta\} = \frac{a_k}{\zeta_k} + \frac{a_{k-1}}{\zeta^{k-1}} + \ldots + \frac{a_1}{\zeta} + P_2(\zeta), \tag{5}$$

wobei die Funktion $P_2(\zeta)$ im Kreise $|\zeta| < \varepsilon$ regulär und für $-\varepsilon < \zeta < \varepsilon$ reell ist. Wenn k gerade ist, müssen $E^{(k,l)}$ und $E_1^{(k,l)}$ als gleichwinklig angenommen werden. Dann gibt es ebenfalls eine zu $E_1^{(k,l)}$ kongruente Ecke $E_2^{(k,l)}$ deren Abbildungsfunktion $z = f_2(\zeta)$ eine Differentialgleichung (5) erfüllt.

Beweis des Hilfssatzes: Wir bezeichnen mit $z = f^*(\zeta_*)$ eine Funktion, welche eine „Umgebung" von $E_1^{(k,l)}$ auf den Halbkreis $|\zeta_*| < \varepsilon$, $\Im(\zeta_*) > 0$ und die Eckenelemente auf den Punkt $\zeta_* = 0$ abbildet. Dann erfüllt $z = f^*(\zeta_*)$ eine Differentialgleichung der folgenden Gestalt:

$$\{z, \zeta_*\} = \frac{b_k}{\zeta_*^{\,k}} + \frac{b_{k-1}}{\zeta_*^{\,k-1}} + \ldots + \frac{b_1}{\zeta_*} + P_1(\zeta_*), \tag{6}$$

wobei die Funktion $P_1(\zeta_*)$ im Kreise $|\zeta_*| < \varepsilon$ regulär und für $-\varepsilon < \zeta_* < \varepsilon$ reell ist. Nach [3] Seite 329, sind die Ecken $E_1^{(k,l)}$ und $R_2^{(k,l)}$ dann und nur dann kongruent, wenn sie durch lineare Transformationen in eine solche Lage gebracht werden können, daß die Funktion

$$\zeta_* = \overline{f^*}(f_2(\zeta)) \equiv g(\zeta) \tag{7}$$

in einer gewissen Umgebung von $\zeta = 0$ regulär und umkehrbar eindeutig ist und innerhalb dieser Umgebung die Halbachse $\zeta > 0$ auf die Halbachse $\zeta_* > 0$ abbildet. Dabei wird mit $\zeta_* = \overline{f^*}(z)$ die Umkehrfunktion von $z = f^*(\zeta_*)$ bezeichnet.

Aus (7) folgt, daß $g(\zeta)$ die folgende Differentialgleichung erfüllt:

$$\{f_2(\zeta), \zeta\} = [g'(\zeta)]^2 \cdot \{f^*(\zeta_*), \zeta_*\} + \{g(\zeta), \zeta\}. \tag{8}$$

Wir setzen

$$\zeta_* = g(\zeta) = \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu \zeta^\nu;\ c_1 > 0,\ c_\nu \text{ reell}. \tag{9}$$

Eine Ecke $E_2^{(k,l)}$ existiert dann und nur dann, wenn die c_ν so bestimmt werden können, daß (8) erfüllt ist und die Reihe (9) konvergiert. Zur Ermittlung der Koeffizienten c_ν führen wir die folgenden Abkürzungen ein:

$$\left.\begin{aligned} &[g'(\zeta)]^2 = \sum_{\nu=0}^{\infty} d_\nu \zeta^\nu;\ \{g(\zeta), \zeta\} = P_3(\zeta) \\ &\frac{1}{c_1 + c_2\zeta + c_3\zeta^2 + \dots} = p_0 + p_1\zeta + p_2\zeta^2 + \dots \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Die Gleichung (8) hat dann unter Berücksichtigung von (5) und (6) die folgende Gestalt:

$$\left.\begin{aligned} &a_k + a_{k-1}\zeta + a_{k-2}\zeta^2 + \dots + a_1\zeta^{k-1} + \zeta^k P_2(\zeta) = \\ &= [d_0 + d_1\zeta + d_2\zeta^2 + \dots] \cdot [b_k(p_0 + p_1\zeta + p_2\zeta^2 + \dots)^k + \\ &+ b_{k-1}\zeta(p_0 + p_1\zeta + \dots)^{k-1} + \dots + b_1\zeta^{k-1}(p_0 + p_1\zeta + \dots) + \\ &+ \zeta^k P_1(c_1\zeta + c_2\zeta^2 + \dots)] + \zeta^k P_3(\zeta). \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Zur Berechnung der Koeffizienten $c_1, c_2, \dots$ aus (11) bezeichnen wir mit $R_\mu(c_1, \dots, c_\nu, b_1, \dots, b_k)$ rationale Funktionen der Koeffizienten $c_1, \dots, c_\nu$, $b_1, \dots, b_k$ welche für $c_1 \neq 0$ endliche Werte annehmen. Dann folgt aus (10):

$$p_\nu c_1 + p_{\nu-1} c_2 + \dots + p_0 c_{\nu+1} = 0 \text{ für } \nu \geqq 1.$$

Also

$$p_\nu = -\frac{c_{\nu+1}}{c_1^2} + R_1(c_1, \dots, c_\nu). \tag{10a}$$

Außerdem ist

$$d_\nu = 2(\nu + 1)\, c_1 c_{\nu+1} + R_2(c_1, \dots, c_\nu) \text{ für } \nu \geqq 1. \tag{10b}$$

Die Gleichung (11) kann für vorgegebene Koeffizienten $a_k, \dots, a_1, b_k, \dots, b_1$ nur dann identisch erfüllt sein, wenn:

$$a_k = d_0 b_k p_0^k = b_k c_1^{2-k}$$

$$\left.\begin{aligned} c_1 &= \left(\frac{a_k}{b_k}\right)^{\frac{1}{2-k}} && \text{für } k \neq 2, \\ a_2 &= b_2, && \text{für } k = 2. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Wegen $c_1 > 0$ folgt aus (12) insbesondere

$$\operatorname{sign}(a_k) = \operatorname{sign}(b_k), \qquad (13)$$

d. h. daß die Ecken nur dann kongruent sein können, wenn sie von derselben Art sind[3].

Wenn $k = 1$ ist, dann kann $c_\nu = 0$ für $\nu \geqq 2$ gesetzt werden, wobei $P_2(\zeta)$ durch $P_1(\zeta_*)$ und c_1 bestimmt ist, und zwar gilt

$$P_2(\zeta) = c_1^2 \, P_1(c_1 \, \zeta). \qquad (14)$$

Die Ecken $E_1^{(1,\,l)}$ und $E_2^{(1,\,l)}$ sind kongruent. Unser Hilfssatz ist also für $k = 1$ bewiesen.

Für den Koeffizienten c_2 ergibt sich für $k \geqq 2$ aus (11) die Gleichung

$$a_{k-1} = d_0(k p_0^{k-1} \, p_1 \, b_k + p_0^{k-1} \, b_{k-1}) + d_1 \, b_k \, p_0^k.$$

Aus (10) folgt

$$d_0 = c_1^2 \qquad d_1 = 4 \, c_1 \, c_2$$

$$p_0 = \frac{1}{c_1} \qquad p_1 = -\frac{c_2}{c_1^2}.$$

Also

$$c_2 = \frac{c_1^2 \, b_{k-1} - c_1^{k-1} \, a_{k-1}}{(k-4) \, b_k} \qquad \text{für } k \neq 4. \qquad (12a)$$

Für $k = 4$ ist notwendig

$$\frac{a_3}{\sqrt{a_4}} = \frac{b_3}{\sqrt{b_4}},$$

d. h. nach [5], daß die Winkel von $E_1^{(4,\,l)}$ und $E_2^{(4,\,l)}$ übereinstimmen. Der Koeffizient c_2 ist in diesem Falle willkürlich wählbar.

Wenn $k = 2$ und $a_2 = b_2$ ist, d. h. daß die Ecken $E_1^{(2,\,l)}$ und $E_2^{(2,\,l)}$ denselben Winkel besitzen, dann kann $c_\nu = 0$ für $\nu \geqq 3$ gesetzt werden, wobei $P_2(\zeta)$ durch $P_1(\zeta_*)$, a_1, b_1 und b_2 bestimmt ist, und zwar gilt ($c_1 = 1$)

$$P_2(\zeta) = 3 \, b_1 \, c_2 - b_2 \, c_2^2 + P_1(\zeta + c_2 \, . \, \zeta^2) - 6 \left(\frac{c_2}{1+2 \, c_2 \, \zeta}\right)^2 \qquad (15)$$

Dabei ist $c_2 = \dfrac{a_1 - b_1}{2 \, b_2}$.

---

[3] Sind die Koeffizienten c_ν so bestimmbar, daß $c_1 < 0$ ist, dann bedeutet dies geometrisch, daß die Ecken spiegelbildlich kongruent sind. Ecken verschiedener Art können nur dann spiegelbildlich kongruent sein, wenn sie von ungerader Ordnung sind.

Die Ecken $E_1^{(2,l)}$ und $E_2^{(2,l)}$ sind kongruent. Unser Hilfssatz ist also für $k = 2$ bewiesen.

Vergleicht man in Formel (11) die Koeffizienten von ζ^ν, $\nu = 1, 2, \ldots, k-1$, so erhält man

$$a_{k-\nu} = d_0\, b_k\, k\, p_0^{k-1}\, p_\nu + d_\nu\, b_k\, p_0^k + R_3(c_1, \ldots, c_\nu, b_1, \ldots, b_k).$$

Hieraus sowie aus (10a) und (10b) errechnet man

$$a_{k-\nu} = b_k\, c_1^{1-k}\, c_{\nu+1}\, [2(\nu+1) - k] + R_4(c_1, \ldots, c_\nu, b_1, \ldots, b_k). \tag{16}$$

Ist k ungerade, dann kann nach dieser Formel der Koeffizient $c_{\nu+1}$, $\nu = 1, 2, \ldots, k-1$, aus den Koeffizienten $c_1, \ldots, c_\nu$ berechnet werden und es kann $c_\nu = 0$ gesetzt werden für $\nu \geqq k+1$. $P_2(\zeta)$ ist analog zu (15) durch $P_1(\zeta_*), b_1, \ldots, b_k, a_1, \ldots, a_k$ bestimmt. Die Ecken $E_1^{(k,l)}$ und $E_2^{(k,l)}$ sind also kongruent und unser Hilfssatz ist für ungerades k bewiesen.

Wenn k gerade ist, dann setzen wir wie in (3) zur Abkürzung

$$\frac{k}{2} = m.$$

Die Gleichung (16) ist für

$$\nu = 1, 2, \ldots, m-2, m, \ldots, k-1$$

nach $c_{\nu+1}$ auflösbar. Für $\nu = m-1$ ist (16) dann und nur dann nach $c_{\nu+1}$ auflösbar, wenn

$$a_{m+1} = R_4(c_1, \ldots, c_\nu, b_1, \ldots, b_k). \tag{17}$$

Andererseits kann eine Lösung nur dann existieren, wenn die Ecken $E^{(k,l)}$ und $E_1^{(k,l)}$ denselben Winkel W besitzen, weil die Ecken $E_1^{(k,l)}$ und $E_2^{(k,l)}$ kongruent sind. Deshalb ist a_{m+1} durch $a_k, \ldots, a_{m+2}, b_k, \ldots, b_{m+1}$ eindeutig bestimmt, da a_{m+1} in die Invariante F_k, welche den Winkel W bestimmt, linear eingeht. Diese für a_{m+1} bestehende Gleichung muß mit (17) übereinstimmen. Die Gleichheit der Winkel ist deshalb neben der Gleichheit der Art die einzige Bedingung für die Existenz einer Ecke $E_2^{(k,l)}$. Damit ist unser Hilfssatz vollständig bewiesen.

Aus dem Hilfssatz ergibt sich leicht der

Beweis des Hauptsatzes: Für ungerades k müssen wir beweisen, daß G für konstantes sign (a_k) denselben Wert annimmt. Wir geben uns zwei reelle Wertesysteme

$$\left.\begin{array}{ll} & a_k, a_{k-1}, \ldots, a_1 \\ & b_k, b_{k-1}, \ldots, b_1 \\ \text{mit} & a_k \neq 0,\ b_k \neq 0,\ \operatorname{sign}(a_k) = \operatorname{sign}(b_k) \end{array}\right\} \tag{18}$$

Nach dem Hilfssatz gibt es zwei kongruente Ecken $E_1^{(k,l)}$ und $E_2^{(k,l)}$, wobei $E_1^{(k,l)}$ zu dem Wertesystem $b_k, \ldots, b_1$ und $E_2^{(k,l)}$ zu dem Wertesystem $a_k, \ldots, a_1$ „gehört". Da G für kongruente Ecken invariant sein soll, gilt

$$G(b_k, \ldots, b_1) = G(a_k, \ldots, a_1). \tag{19}$$

Daraus folgt Gleichung (C) des Hauptsatzes.

Für gerades k setzen wir in (18) noch voraus:

$$F_k(b_k, \ldots, b_{m+1}) = F_k(a_k, \ldots, a_{m+1}) = W.$$

Nach dem Hilfssatz gibt es zwei kongruente Ecken $E_1^{(k,l)}$ und $E_2^{(k,l)}$ mit dem Winkel W, wobei $E_1^{(k,l)}$ zu dem Wertesystem $b_k, \ldots, b_1$ und $E_2^{(k,l)}$ zu dem Wertesystem $a_k, \ldots, a_1$ „gehört". Da G für kongruente Ecken invariant sein soll, gilt wieder (19). Daraus folgt Gleichung (A) des Hauptsatzes.

Da W für Ecken 1. Art reell, für Ecken 2. Art rein imaginär ist, gilt (B) für $F_k \neq 0$. Damit ist der Hauptsatz vollständig bewiesen.

Da für $F_k = 0$, $k \geqq 4$ die Ecke sowohl von der 1. Art als auch von der 2. Art sein kann, ist (B) in diesem Falle nicht richtig. Jedoch gilt (B) auch für $F_k = 0$, $k = 2$, da für $k = l = 2$ stets $W \neq 0$ ist.

Aus der vorliegenden Untersuchung ergeben sich weitere Probleme, z. B. die Frage nach funktionentheoretischen Invarianten von Ecken unendlicher Ordnung.

Literatur

[1] *Helmut Unkelbach*: Die konforme Abbildung echter Polygone. Mathem. Ann. **125**, 82—118 (1952).

[2] *Helmut Unkelbach*: Geometrie und konforme Abbildung verallgemeinerter Kreisbogenpolygone I. Mathem. Ann. **129**, 391—414 (1955).

[3] *Helmut Unkelbach*: Geometrie und konforme Abbildung verallgemeinerter Kreisbogenpolygone II. Mathem. Ann. **130**, 327—336 (1955).

[4] *Helmut Unkelbach*: Die funktionentheoretischen Invarianten für Ecken gerader Ordnung. Mathem. Ann. **133**, 320—327 (1957).

[5] *Helmut Unkelbach*: Über Ecken mit imaginären Winkeln und ihre konforme Abbildung. Monatshefte für Mathematik, **62**, 200—211 (1958).

[6] *F. Stallmann*: Konforme Abbildung von Kreisbogenpolygonen I. Math. Z. **60**, 187—212 (1954).

[7] *F. Stallmann*: Konforme Abbildung von Kreisbogenpolygonen II. Math. Z. **68**, 27—76 (1957).

[8] *F. Stallmann*: Konforme Abbildung von Kreisbogenpolygonen III. Math. Z. **68**, 245—266 (1957).

Weitere Literatur in [1], [6] — [8].

Über Trochoidenschraublinien und zyklische Schraubflächen

Von

H. Horninger, Istanbul

Mit 5 Textabbildungen

(*Eingegangen am 3. Februar 1958*)

Mit dem vorliegenden Aufsatz beende ich die Untersuchungen über die Beziehungen, die zwischen Euklidischen Schraubflächen und bestimmten Arten zusammengesetzter Schraubungen bestehen, wobei ich insbesondere die Frage zu klären versucht habe, unter welchen Voraussetzungen sich *die Durchdringungskurven dieser Flächen als Bahnkurven solcher Bewegungen darstellen lassen.* Wie in früheren Arbeiten gezeigt, ergeben sich die auf Drehkegeln bzw. einschaligen Drehhyperboloiden liegenden *konischen Schraublinien und Evolventenschraublinien* als Durchdringungskurven koachsialer geschlossener, bzw. offener schiefer Regelschraubflächen und als Bahnkurven von Evolventenschraubungen[1]; *Trochoidenschraublinien* als Durchdringungskurven koachsialer gerader Kreisschraubflächen und als Bahnkurven von Trochoidenschraubungen[2], sowie *Konchoidenschraublinien* (als Verallgemeinerung der exzentrischen Euklidischen Schraublinien von Wendelflächen) als Durchdringungskurven achsenparalleler gerader Regelschraubflächen und als Bahnkurven von Konchoidenschraubungen[3].

In den nachfolgenden Zeilen zeige ich zunächst, daß jede Trochoidenschraublinie *auf ∞ viele Arten als Bahnkurve proportional zusammengesetzter Euklidischer Schraubungen* mit zueinander parallelen Achsen

[1] *H. Horninger*: „Über eine planare Evolventenbewegung" (Bull. of Techn. Univ. Istanbul, Vol. III, Nb. 1, 1950, p. 103—122 und „Über eine Evolventenschraubung" (Rev. de la Fac. Sc. Univ. Istanbul, A—XVI—4; 1951, p. 255—277.

[2] *H. Horninger*: „Über Trochoidenschraublinien und die durch Trochoidenschraubung erzeugbaren Kreisschraubflächen", Mh. f. Math. 1954, Bd. 58, S. 193—212.

[3] *H. Horninger*: „Über Konchoidenschraublinien und die durch Konchoidenschraubung erzeugbaren Regelschraubflächen", Mh. f. Math. 1954, Bd. 58, S. 226—240.

gewonnen werden kann, also eine spezielle *Helikoide* ist[4]; ihre Ganghöhe läßt sich aus den Ganghöhen beider Schraubungen und dem Proportionalitätsfaktor in einfacher Weise ableiten (Nr. 1). Jede zyklische Schraubfläche Φ ist *durch* ∞ *viele Trochoidenschraubungen erzeugbar*; wenn die Normalschnitt-Trochoiden von Φ algebraisch sind, so ist die Ganghöhe jeder auf Φ liegenden Trochoidenschraublinie, die einen algebraischen Grundriß besitzt, ein ganzzahliges Vielfaches der Geschoßhöhe von Φ. Hieraus folgt u. a., daß zwei algebraische Trochoiden, die dieselben Leitkreise l_i' besitzen, eine *bestimmte Anzahl stets reeller Schnittpunkte* haben, die dadurch ausgezeichnet sind, daß ihre Leitpunkte je ein den Kreisen l_i' eingeschriebenes regelmäßiges Polygon bilden (Nr. 2). Die Existenz dieser *Hauptschnittpunkte* führt zur Erkenntnis, daß dem Gesamtschnitt zweier zyklischer Schraubflächen Φ_1, Φ_2, deren exzentrische Schraublinien auf denselben Drehzylindern liegen, eine *bestimmte Anzahl von Trochoidenschraublinien* angehört. Die Grundrisse dieser, den *Hauptschnitt* $\Phi_1 \Phi_2$ bildenden Kurven liegen je nach den Modulwerten der Normalschnitte w_1, w_2 von Φ_1, Φ_2 und den Geschoßhöhen beider Flächen entweder in einer *einzigen* Trochoide oder in *mehreren, symmetrisch verteilten Kurven* (Nr. 3). Alle algebraischen Trochoiden, die durch die N Hauptschnittpunkte von w_1, w_2 laufen, bilden ein *Büschel*; dieses kann entweder als *Grundriß der Hauptschnitte* je zweier zyklischer Schraubflächen oder als *ebener Schnitt des Büschels aller zyklischen Schraubflächen* gedeutet werden, dessen Basis aus N äquidistanten, einander im Grundriß deckenden Trochoidenschraublinien besteht (Nr. 4).

1. Erzeugung von Trochoidenschraublinien mittels proportionaler Schraubungen. Jede Trochoidenschraublinie k ist bekanntlich gemeinsame Bahnkurve zweier koachsialer Trochoidenschraubungen $\mathfrak{T}_i$ $(i = 1, 2)$. Wird die Achse f von k vertikal gewählt, so ist der in π_1 liegende Grundriß k' von k als gemeinsame Bahn der Kreisrollungen $\mathfrak{T}_i'$ eine Trochoide mit der Mitte f' (Abb. 1). Wir denken π_1 durch den Punkt P_0 von k gelegt, dessen Grundriß ein Scheitel P_0' von k' ist; die Ebene $\Sigma_0 = P_0 f$ besitzt die Symmetrieachse $\Sigma_0' = P_0' f'$ von k' zur Spur. Wenn k' algebraisch ist — was im Folgenden stets vorausgesetzt wird —, so lassen sich die Modulwerte m_i von k' (d. h. die Verhältnisse zusammengehöriger Grundrißwinkel α_i, β_i der Bewegungen

[4] Über Helikoidenbewegungen und ihre Bahnen vgl. *F. Hohenberg*: „Über die Zusammensetzung zweier gleichförmiger Schraubungen", Mh. f. Math. 1950, Bd. 54, S. 222–234.

$\mathfrak{T}_i$) als Quotienten je zweier zueinander teilerfremder ganzer Zahlen a_i, b_i ausdrücken:

$$m_i = a_i : b_i = \alpha_i : \beta_i \tag{1}$$

Durch die Bedingung

$$\Sigma m_i = -1, \tag{2}$$

an die die Zahlen m_i gebunden sind, werden zwischen a_i, b_i und α_i, β_i die Beziehungen

$$a_i + b_i = a_{i\pm1};\ \alpha_i + \beta_i = \alpha_{i\pm1} \tag{3}$$

hergestellt (oberes Vorzeichen für $i = 1$, unteres für $i = 2$; also $\Sigma b_i = \Sigma \beta_i = 0$). Die Leitschraublinien l_i von k gehören den Drehzylindern Λ_i an, deren in π_1 befindliche Normalschnitte die Leitkreise l_i' von k' sind; ihre Ganghöhen seien durch $\mathfrak{j}_i$ bezeichnet[5]. Die Urschraublinien u_i von k liegen auf zwei mit P_0 inzidenten Drehzylindern $\sigma_{i,0}$, deren Achsen $e_{i,0}$ zu f parallel sind und der Ebene Σ_0 angehören. Der Radius von u_i ist gleich dem von $l_{i\pm1}$, die Ganghöhen $\mathfrak{v}_i$ der Kurven u_i sind entgegengesetzt gleich. Um einen beliebigen Punkt P von k zu erhalten, bringt man entweder P_0 durch die Leitschraubung $\mathfrak{L}_i(f; \mathfrak{j}_i)$ in die zum Grundrißwinkel α_i gehörige Lage J_i und dreht J_i um die Gerade e_i, in die $e_{i,0}$ durch $\mathfrak{L}_i$ übergeht, durch den Winkel β_i; oder man führt P_0 auf der Urschraublinie u_i in die durch den Grundrißwinkel β_i bestimmte Lage U_i und dreht U_i um f durch α_i. Die Höhe von P über π_1 ist demnach

$$\mathfrak{z} = \frac{\mathfrak{j}_i}{2\pi}\alpha_i = \frac{\mathfrak{v}_i}{2\pi}\beta_i \tag{4}$$

Die Ganghöhe von k besitzt als kleinstes gemeinsames Vielfaches von $\mathfrak{j}_i$, $\mathfrak{v}_i$ den Wert

$$\mathfrak{H} = a_i \mathfrak{j}_i = b_i \mathfrak{v}_i. \tag{5}$$

Die mit P gleich hoch liegenden Punkte F, L_i von f, l_i bilden im Verein mit P ein Parallelogramm.

k ergibt sich aber auch *durch proportionale Zusammensetzung zweier Schraubungen* $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{E}_i$ (bzw. $\mathfrak{E}_{i,0}$), mit den Achsen f, e_i (bzw. $e_{i,0}$), soferne deren Ganghöhen $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{h}_i$ die Bedingung

$$\mathfrak{H} = \begin{vmatrix} a_i & b_i \\ -\mathfrak{h}_i & \mathfrak{s} \end{vmatrix} \tag{6}$$

[5] Über Definition und Grundeigenschaften der Trochoidenschraublinien vgl. die in Fußn. 2 zit. Abh. Während sich für die Beweisführungen a. a. O. die Parameter aller vorkommenden Schraubungen als zweckentsprechend erwiesen hatten, zeigen sich für die vorliegenden Untersuchungen die Ganghöhen derselben als geeigneter. Gleichfalls aus Zweckmäßigkeitsgründen sind einige Bezeichnungen gegenüber der obgenannten Abh. geändert worden.

erfüllen: Die Teilschraubungen $\mathfrak{S}(f; \mathfrak{z}, \alpha_i)$ bzw. $\mathfrak{E}_{i,0}(e_{i,0}; \mathfrak{h}_i, \beta_i)$ bringen nämlich P_0 mit je einem Punkt P_i, bzw. V_i zur Deckung, dessen Grundriß mit J_i', bzw. U_i' zusammenfällt; die Teilschraubungen $\mathfrak{E}_i(e_i; \mathfrak{h}_i, \beta_i)$,

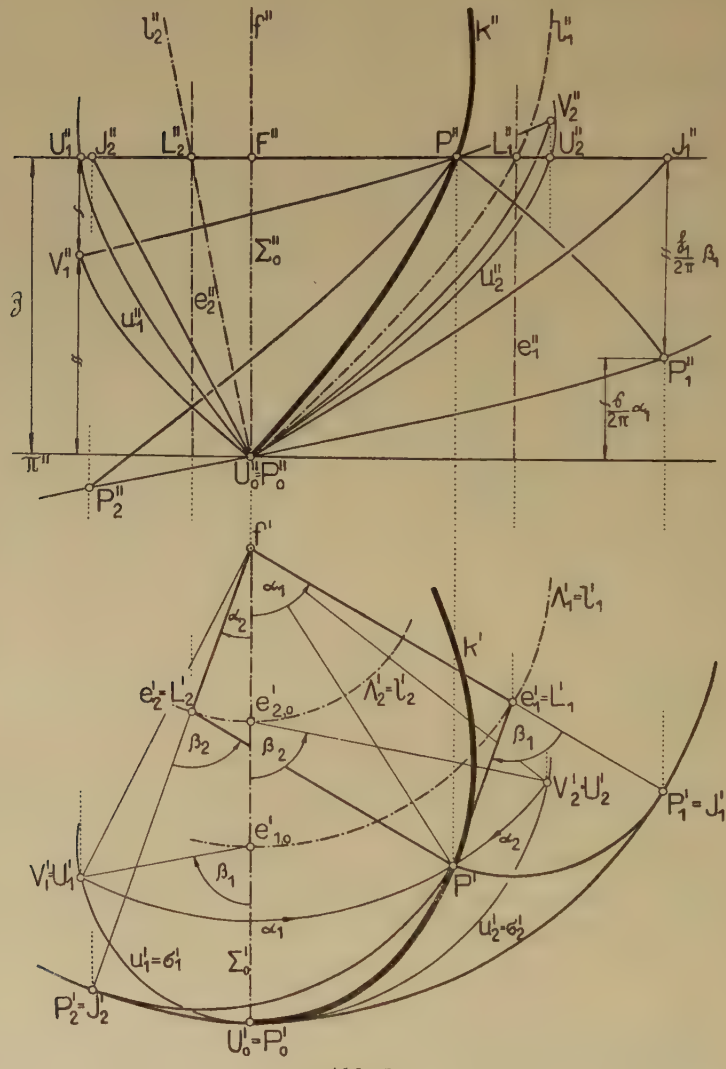

Abb. 1

$\mathfrak{S}(f; \mathfrak{z}, \alpha_i)$ führen die Punkte P_i, V_i in P über. Für die Höhe $\mathfrak{z}$ von P ergibt sich bei dieser Darstellungsweise der Wert

$$\mathfrak{d} = \frac{1}{2\pi} \cdot \begin{vmatrix} a_i & \beta_i \\ \mathfrak{h}_i & \mathfrak{s} \end{vmatrix}, \tag{7}$$

dessen Identität mit dem in Gl. 4 angegebenen Wert mittels der Gl. 1, 5, 6 unmittelbar bestätigt wird (vgl. auch Abb. 1; die zur Konstruktion derselben verwendeten Zahlenwerte sind in Tab. 1 zusammengefaßt). Da es ∞^1 Wertepaare $\mathfrak{h}_i$, $\mathfrak{s}$ gibt, die bei konstanten a_i, b_i, $\mathfrak{H}$ die Gl. 6 befriedigen, so gibt es ∞^1 *Schraubungspaare, durch deren proportionale Zusammensetzung die Trochoidenschraubungen* $\mathfrak{T}_i$ *entstehen*; zwischen den Ganghöhen $\mathfrak{h}_i$, $\mathfrak{s}$ zusammengehöriger Paare besteht wegen Gl. 3 die Beziehung

$$\Sigma \mathfrak{h}_i = \mathfrak{s} \tag{8}$$

Die speziellen Paare, die wir zur ursprünglichen Definition der Bewegungen $\mathfrak{T}_i$ verwendet hatten (Schraubung + proportionaler Drehung), sind durch $\mathfrak{h}_i = 0$, bzw. $\mathfrak{s} = 0$ bestimmt. Jede Bewegung, die durch proportionale Zusammensetzung zweier Schraubungen zustandekommt, wird nach *F. Hohenberg* als *Helikoidenbewegung* bezeichnet[4]; durch die vorstehenden Überlegungen ist demnach erwiesen:

I: *Die Helikoidenbewegungen, die durch Zusammensetzung von Schraubungen mit zueinander parallelen Achsen entstehen, sind Trochoidenschraubungen; jede solche Bewegung kann durch* ∞^1 *verschiedene Paare einander proportional zugeordneter Schraubungen definiert werden. Jede Trochoidenschraublinie k ist als gemeinsame Bahnkurve zweier Trochoidenschraubungen auf zwei verschiedene Arten durch je* ∞^1 *Helikoidenbewegungen erzeugbar; ihre Ganghöhe wird durch die Determinante aus den Ganghöhen beider Schraubungen und den zueinander teilerfremden ganzen Zahlen dargestellt, deren Quotienten die Modulwerte von k′ sind.*

Da jede vertikale Gerade, die den Bewegungen $\mathfrak{T}_i$ unterworfen wird, in ihrer Richtung ungeändert bleibt, so können wir die Trochoidenschraubungen auch als *diejenigen Helikoidenbewegungen erklären, die eine feste Richtung des Raumes invariant lassen.*

Tabelle 1:

i	m_i	a_i b_i	α_i β_i	$\mathfrak{j}_i$ $\mathfrak{v}_i$	$\mathfrak{d}$	$\mathfrak{H}$	$\mathfrak{h}_i$ $\mathfrak{s}$
1	$-3:4$	3 -4	$\frac{\pi}{3}$ $\frac{-4\pi}{9}$	24 -18	4	72	-12 8
2	$-1:4$	-1 4	$-\frac{\pi}{9}$ $\frac{4\pi}{9}$	-72 18			20

2. Die Trochoidenschraublinien einer zyklischen Schraubfläche. Unterwirft man die mit P_0 inzidenten Schraublinien $c_{i,0}(e_{i,0}; \mathfrak{h}_i)$ der Schraubung $\mathfrak{S}(f; \mathfrak{s})$, so entsteht *eine und dieselbe zyklische Schraubfläche* Φ, da Gl. 8 mit der Bedingung identisch ist, an die die Ganghöhen der drei Scharen Euklidischer Schraublinien von Φ (der Bahnschraublinien mit der Achse f und der exzentrischen Schraublinien c_i) gebunden sind[6]. P_0 wird durch einen vollen Gang von $\mathfrak{S}$ auf der Geraden $p = P_0 // f$ um die Strecke $\mathfrak{s}$ und durch einen Gang der Schraubung $\mathfrak{E}_{i,0}$, deren Bahn $c_{i,0}$ ist, um die Strecke $\mathfrak{h}_i$ verschoben. Der kürzeste Abstand, den zwei auf p liegende Punkte der Fläche voneinander haben, ist daher der Maximalteiler $\mathfrak{G}$ von $\mathfrak{h}_i$ und $\mathfrak{s}$, den wir als *Geschoßhöhe* von Φ bezeichnen wollen; die durch die Gl.

$$a_i' = \mp \mathfrak{h}_i : \mathfrak{G}; \quad b_i' = \pm \mathfrak{s} : \mathfrak{G} \tag{9}$$

definierten ganzen Zahlen a_i', b_i' sind relativ prim (oberes Vorzeichen für $i = 1$, unteres für $i = 2$). Die Normalschnitte von Φ sind algebraische Trochoiden w, deren Leitkreise den Zylindern Λ_i angehören und deren Modulwerte m_i' durch die Gl.

$$m_i' = -\mathfrak{h}_i : \mathfrak{s} = a_i' : b_i' \tag{10}$$

bestimmt sind; je zwei Normalschnitte vom Höhenunterschied $\mathfrak{G}$ besitzen denselben Grundriß. Abb. 2 zeigt einen einfachen, durch die Annahme $\mathfrak{h}_1 = \mathfrak{h}_2$ charakterisierten Fall; die Normalschnitte sind Ellipsen.

Die Fläche Φ entsteht auch, wenn man die Schraublinien $c_{i,0}$ einer der ∞^1, durch je einen beliebigen Proportionalitätsfaktor m_i definierten Trochoidenschraubungen T_i unterwirft, die durch Zusammensetzung der Schraubungen $\mathfrak{E}_{i,0}$, $\mathfrak{S}$ zustandekommt, weil die Kurven $c_{i,0}$ durch die Schraubungen $\mathfrak{E}_{i,0}$ nur in sich bewegt werden[7]. Von den ∞^2 Trochoidenschraublinien k, die die Punkte der Schraublinien $c_{i,0}$ bei diesen Bewegungen durchlaufen, sind je ∞^1, durch die gleichen Werte m_i definierten Kurven einander kongruent; die Leitschraublinien aller Kurven k liegen auf den Zylindern Λ_i. Die Ganghöhe $\mathfrak{H}$ jeder solchen Kurve hängt von $\mathfrak{h}_i$, $\mathfrak{s}$ und den m_i bestimmenden Zahlen a_i, b_i gemäß Gl. 6 ab; die exzentrischen Schraublinien von Φ sind durch $a_i = 0$ oder $a_i = 1$, $b_i = -1$ definiert, die Bahnschraublinien durch $b_i = 0$. Ersetzt

[6] Vgl. z. B. *L. Burmester*, Kinematische Flächenerzeugung vermittelst zylindrischer Rollung, Z. Math. Phys. 33 (1888), S. 337–348, oder *E. Müller*, Über Schiebflächen, deren eine Erzeugendenschar aus gewöhnlichen Schraublinien besteht, Sitz.-Ber. Ak. d. Wiss. Wien 1909, IIa, S. 1–11.

[7] Vgl. die in Fußn. 4 zit. Abh. von *F. Hohenberg*, Schluß von Nr. 3.

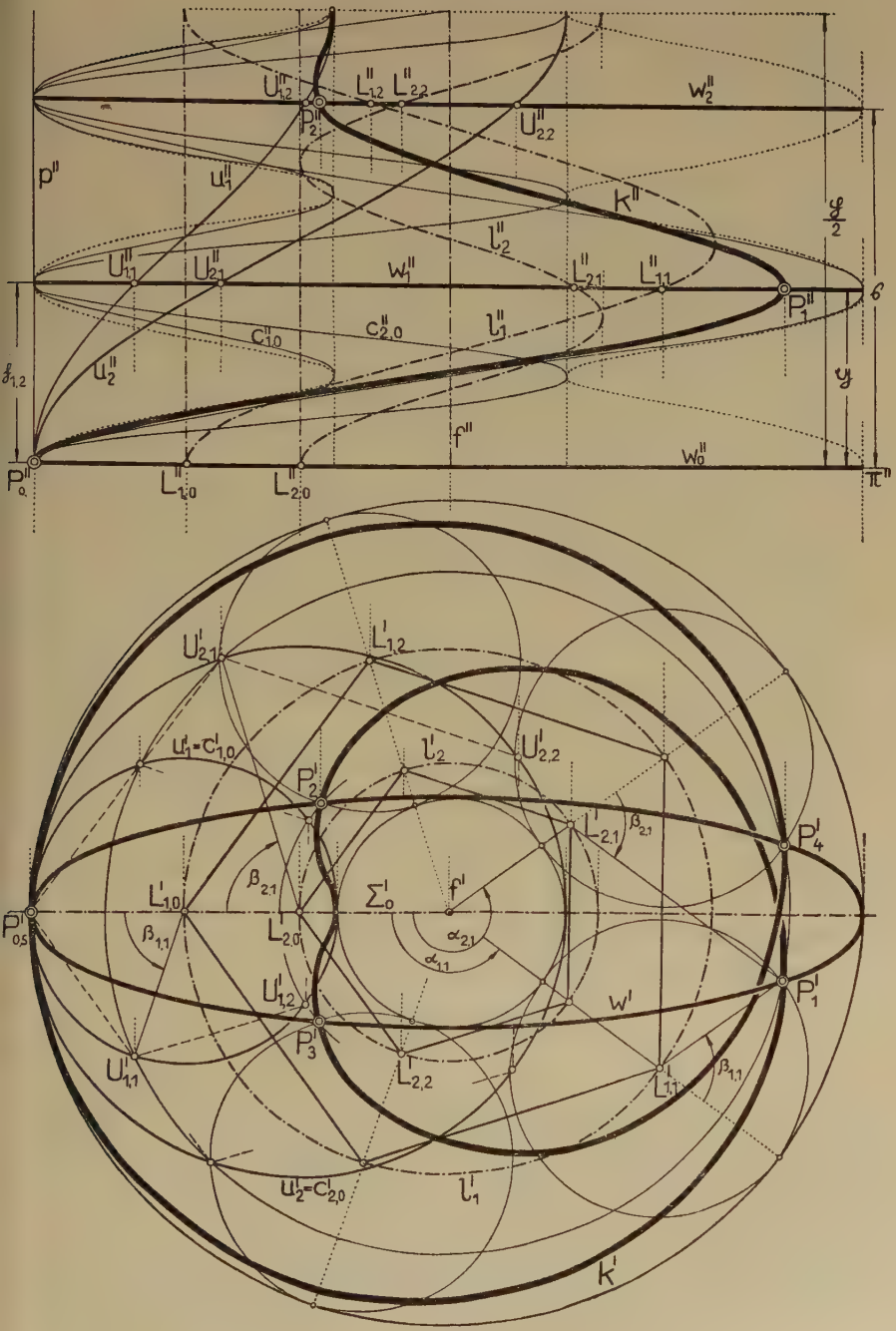
U''_{12}
$L''_{1,2}$
$L''_{2,2}$
w''_2
P''_2
$U''_{2,2}$
p''
u''_1
k''
$\frac{g}{2}$
l''_2
U''_{11}
U''_{21}
w''_1
$L''_{2,1}$
$L''_{1,1}$
P''_1
$c''_{1,0}$
$c''_{2,0}$
l''_1
$\frac{g}{2}$
u''_2
f''
w''_0
P''_0
$L''_{1,0}$
$L''_{2,0}$
$U'_{2,1}$
$L'_{1,2}$
$u'_1=c'_{1,0}$
l'_2
$U'_{2,2}$
P'_2
$L'_{2,1}$
$\beta_{2,1}$
P'_4
$L'_{1,0}$
$\beta_{2,1}$
Σ'_0
f'
$P'_{0,5}$
$\beta_{1,1}$
$L'_{2,0}$
$\alpha_{2,1}$
$\alpha_{1,1}$
$U'_{1,2}$
w'
P'_1
P'_3
$U'_{1,1}$
$L'_{2,2}$
$L'_{1,1}$
$\beta_{1,1}$
$u'_2=c'_{2,0}$
l'_1
k'

Abb. 2

man in Gl. 6 die Werte $\mathfrak{y}_i$, $\mathfrak{z}$ durch die in den Gl. 9 angegebenen Ausdrücke und schreibt

$$n = \begin{vmatrix} a_i & b_i \\ a_i' & b_i' \end{vmatrix}, \tag{11}$$

so nimmt Gl. 6 die einfache Form

$$\mathfrak{H} = n \,.\, \mathfrak{G} \tag{12}$$

an[8]. *Ein Gang von k erstreckt sich also über genau n Geschosse von* Φ. Hieraus folgt einerseits, daß je n Normalschnitte von Φ, die einander im Grundriß decken, k *in Punkten desselben Ganges schneiden* bzw. anderseits, daß je n auf Φ liegende Trochoidenschraublinien von der Ganghöhe $\mathfrak{H}$ *einen und denselben Grundriß besitzen*; je zwei der Kurven gehen durch Parallelverschiebung um die Strecke $\mathfrak{G}$ ineinander über.

II: *Jede zyklische Schraubfläche* Φ *kann auf zwei verschiedene Arten durch je* ∞^1 *koachsiale Trochoidenschraubungen als Bahnfläche einer Euklidischen Schraublinie erzeugt werden. Wenn sich die Modulwerte* m_i, m_i' *einer auf* Φ *liegenden Trochoidenschraublinie k und der Normalschnitte w von* Φ *als Quotienten je zweier teilerfremder ganzer Zahlen* a_i, b_i *bzw.* a_i', b_i' *ausdrücken lassen, so ist die Ganghöhe* $\mathfrak{H}$ *von k gleich dem Produkt aus der Geschoßhöhe von* Φ *und der aus* a_i, b_i; a_i', b_i' *gebildeten Determinante.*

Da die in den Höhen $\mathfrak{z} = r \,.\, \mathfrak{G}$ $(r = 1, 2 \ldots n)$ befindlichen Normalschnitte w_r von Φ einen und denselben Grundriß w' besitzen, so stellen die Grundrisse P_r' ihrer Schnittpunkte P_r mit k zugleich n *Schnittpunkte der Trochoiden* k', w' dar. Die Leit- und Urpunkte jedes Punktes P_r sind die in derselben Höhe liegenden Punkte $L_{i,r}$, $U_{i,r}$ der Leit- und Urschraublinien l_i, u_i von k; ihre Grundrisse $L_{i,r}'$, $U_{i,r}'$ sind wegen Gl. 4, 5 durch die Zentriwinkel

$$\alpha_{i,r} = \frac{2\pi \,.\, ra_i}{n}; \quad \beta_{i,r} = \frac{2\pi \,.\, rb_i}{n} \tag{13}$$

der Kreise l_i', u_i' bestimmt ($\alpha_{1,1} = L_{1,0}'\, L_{1,1}'$ ... usw.). Die Punkte $L_{i,r}'$ bilden daher auf den Kreisen l_i', die Punkte $U_{i,r}'$ auf u_i' die Ecken je eines *regelmäßigen Polygons*. Wenn die Zahlen a_i, a_i' einerseits bzw. b_i, b_i' anderseits relativ prim sind, so gilt dasselbe für die Zahlen a_i, n

[8] Wir wollen n und analoge, je eine Anzahl reeller Elemente darstellenden Zahlen stets positiv nehmen, auch ohne $| n |$ zu schreiben. Unter Berücksichtigung der Gl. 3 kann man n auch durch die Determinante $\begin{vmatrix} a_i & a_{i\pm1} \\ a_i' & a'_{i\pm1} \end{vmatrix}$ ausdrücken.

bzw. b_i, n; in diesem Fall sind alle Polygone *n-Ecke*. Für $r = a_i'$ folgt aus Gl. 13 wegen Gl. 11

$$\bar{\alpha}_i = \frac{2\pi . a_i' a_i}{n}; \quad \bar{\beta} = \frac{2\pi . a_i' b_i}{n} = \frac{2\pi . a_i b_i'}{n} \pm 2\pi \tag{14}$$

D. h. Der Grundriß des in der Höhe $a_i' . \mathfrak{G}$ liegenden Punktes von k besitzt *dieselben Leit- und Urpunkte, gleichgültig ob man ihn als Punkt von k' oder von w' ansieht.* Dasselbe gilt offenbar für alle Punkte von k, deren Höhe ein ganzzahliges Vielfaches von a_i' $\mathfrak{G}$ ist. Wegen der vorausgesetzten Teilerfremdheit von a_i, a_i' gelangt man auf diese Weise zu n verschiedenen, insgesamt a_i' aufeinanderfolgenden Gängen von k angehörigen Punkten, deren Grundrisse mit den oberwähnten n Schnittpunkten P_r' von k' und w' identisch und durch die Eigenschaft gekennzeichnet sind, in Bezug auf k' und w' die gleichen Leit- und Urpunkte zu besitzen. Wir wollen die solcherart aus der Gesamtheit aller Schnittpunkte k' w' herausgehobenen Punkte P_r' als *Hauptschnittpunkte* beider Kurven bezeichnen; die übrigen Schnittpunkte der Trochoiden (*Nebenschnittpunkte*) sind dadurch charakterisiert, daß sie voneinander verschiedene Leit- und Urpunkte besitzen, jenachdem man sie als Punkte der einen oder der anderen Trochoide auffaßt. Wenn eines der Zahlenpaare a_i, a_i' oder b_i, b_i' einen von 1 verschiedenen ganzzahligen Maximalteiler p_i, bzw. q_i aufweist, so ist dieser auch Maximalteiler von a_i, n bzw. b_i, n. In diesem Fall bilden die Leitpunkte $L_{i,r}'$ der n Hauptschnittpunkte k' w' auf dem Kreis l_i' ein regelmäßiges Polygon von der Seitenzahl $n : p_i$, die auf u_i' liegenden Punkte $U_{i,r}'$ ein solches von der Seitenzahl $n : q_i$. Jeder Punkt $L_{i,r}'$ ist gemeinsamer Leitpunkt für p_i verschiedene Punkte P_r', jeder Punkt $U_{i,r}'$ gemeinsamer Urpunkt für q_i dieser Punkte. Aus der vorausgesetzten Teilerfremdheit von a_i, b_i einerseits bzw. a_i', b_i' anderseits folgt aber, daß stets wenigstens *einer* der vier durch Gl. 13 dargestellten Quotienten nicht mehr kürzbar ist, d. h. daß *mindestens eines der vier Polygone ein n-Eck* ist. Wir gewinnen somit folgende Ergebnisse:

III: *Wenn zwei algebraische Trochoiden die gleichen Leitkreise haben, so ist eine bestimmte Anzahl n ihrer Schnittpunkte (die Hauptschnittpunkte der Kurven) stets reell und dadurch gekennzeichnet, daß ihre Leit- und Urpunkte in Bezug auf beide Kurven dieselben sind und die Ecken je eines regelmäßigen Polygons bilden. Sind die Modulwerte der Trochoiden als Quotienten je zweier teilerfremder ganzer Zahlen a_i, b_i, bzw. a_i', b_i' gegeben, so ist n die aus a_i, b_i; a_i', b_i' gebildete Deter-*

minante. Bezeichnen p_i, q_i die Maximalteiler von a_i, a_i' bzw. b_i, b_i', so gibt $n : p_i$ bzw. $n : q_i$ die Seitenzahl der Polygone an; mindestens eines derselben ist ein n-Eck[9].

IV: *Die Punkte, in denen jede Trochoidenschraublinie k einer zyklischen Schraubfläche Φ alle einander im Grundriß deckenden Normalschnitte w (oder ein Normalschnitt der Fläche alle einander im Grundriß deckenden Trochoidenschraublinien) von Φ trifft, bilden sich im Grundriß als sämtliche Hauptschnittpunkte k' w' ab.*

Aus der Beweisführung folgt, daß die Trochoiden k', w' gegeneinander ganz beliebige Lage einnehmen können, soferne nur die Grundforderung erfüllt ist, daß beide Kurven *die gleichen Leitkreise* besitzen. M. a. W.: Denkt man etwa k' festgehalten, w' aber um den gemeinsamen Mittelpunkt f' beider Trochoiden gedreht, so bilden in jedem Augenblick *je n Punkte von k' die Hauptschnittpunkte beider Kurven*; die Leit- und Urpunkte jeder solchen Punktegruppe formen je ein regelmäßiges Polygon. Ist demnach *ein* Hauptschnittpunkt bekannt, so kann man *alle übrigen* durch Konstruktion der Polygone finden, ohne die Trochoiden selbst zeichnen zu müssen; die Zuordnung zwischen den Eckpunkten der Polygone, die Leit- und Urpunkte desselben Hauptschnittpunktes darstellen, ist durch die Gl. 13 gegeben. Bei der in Abb. 2 gewählten Annahme (Tab. 2) liegt der Anfangspunkt P_0' auf der gemeinsamen Symmetrieachse Σ_0' der Trochoiden k', w'; die Polygone und die Hauptschnittpunkte sind daher bezüglich Σ_0' symmetrisch.

Tabelle 2:

i	$\mathfrak{h}_i$	$\mathfrak{s}$	a_i'	b_i'	a_i	b_i	n
1	2	4	−1	2	2	1	5
2	2		1	−2	3	−1	

In Abb. 3 ist P_0' als willkürlicher Punkt von k' vorausgesetzt; die Polygone und die Hauptschnittpunkte P_r' von k', w' besitzen diesfalls keine gemeinsame Symmetrieachse. Die der Zeichnung zugrundegelegten

[9] Dieses Ergebnis kann naturgemäß auch auf rein planimetrischem Weg abgeleitet werden; ich habe jedoch den obigen, auf räumlicher Betrachtung fußenden Beweis vorgezogen, da ich in erster Linie die charakteristischen — und, wie ich annehmen darf, noch nicht bekannten — Eigenschaften der auf einer zyklischen Schraubfläche liegenden Trochoidenschraublinien zeigen wollte und die auf eine ebene Trochoiden bezüglichen — in dieser Form vielleicht noch nicht abgeleiteten — Ergebnisse hiebei von selbst zu Tage treten.

Modulwerte beider Kurven und die aus ihnen folgenden Größen sind in Tab. 3 verzeichnet. Die Konstruktion der Punkte P_r' ist unabhängig davon, welche der Trochoiden man als Grundriß einer Trochoidenschraublinie k ansieht, nur die Bezifferung der Punkte wird von dieser Voraussetzung beeinflußt; die Indices der Punkte P_r' stellen zugleich die Koten der Punkte P_r von k dar.

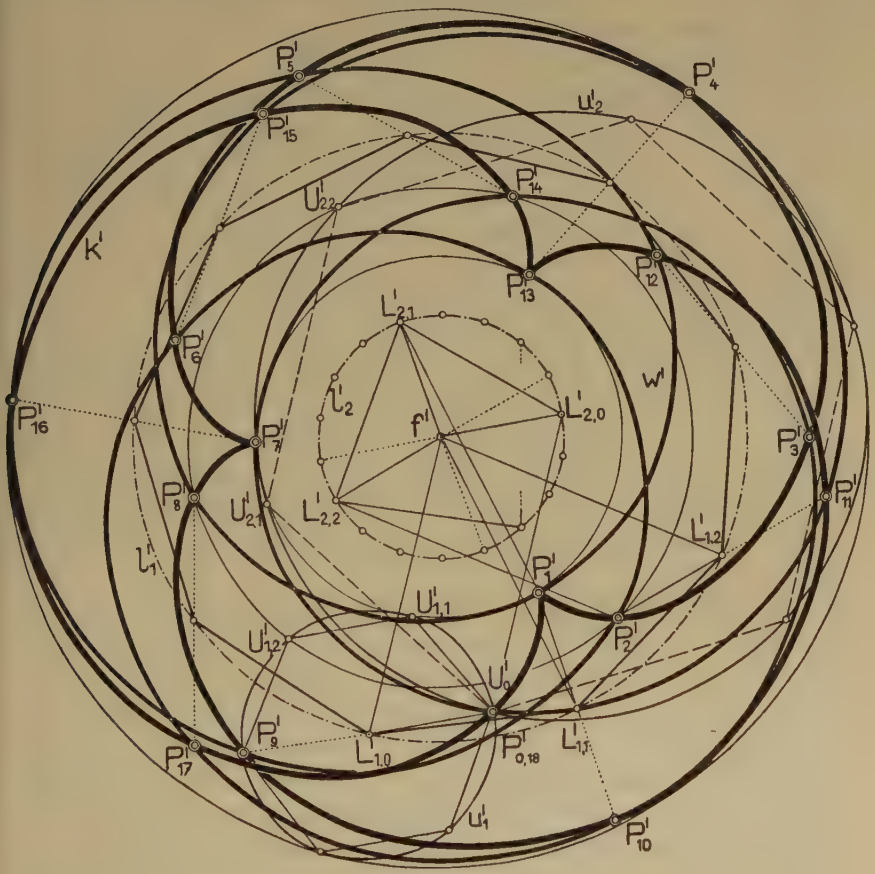

Abb. 3

Tabelle 3:

i	a_i	b_i	a_i'	b_i'	n	p_i	q_i	$n:p_i$	$n:q_i$
1	2	3	4	−3	18	2	3	9	6
2	5	−3	1	3		1	3	18	6

3. Trochoidenschraublinien als Durchdringungskurven zyklischer Schraubflächen. Wenn zwei auf demselben Drehzylinder $\sigma_{i,0}$ liegende Schraublinien von willkürlichen Ganghöhen $\mathfrak{h}_i'$, $\mathfrak{h}_i''$ je einer von zwei Schraubungen $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$ unterworfen werden, die die gleiche, zur Achse von $\sigma_{i,0}$ parallele Gerade f zur Achse, aber voneinander verschiedene Ganghöhen $\mathfrak{s}'$, $\mathfrak{s}''$ haben, so entstehen zwei koachsiale zyklische Schraubflächen Φ_1, Φ_2, deren gegenseitige Lage dadurch gekennzeichnet ist, daß *jeder Drehzylinder σ_i, der eine exzentrische Schraublinie der einen Fläche trägt, auch eine oder mehrere exzentrische Schraublinien der anderen enthält.* Die in π_1 liegenden Normalschnitte von Φ_1, Φ_2 sind zwei konzentrische Trochoiden w_1, w_2, die dieselben Leitkreise l_i' haben; die Leitschraublinien aller auf Φ_1 und Φ_2 befindlichen Trochoidenschraublinien gehören den mit den Kreisen l_i' inzidenten Drehzylindern Λ_i an. Alle Schnittpunkte je zweier auf demselben Drehzylinder σ_i liegenden Schraublinien von Φ_1 und Φ_2 sind nach der in Nr. 2 gegebenen Definition Hauptschnittpunkte der mit ihnen inzidenten Normalschnitte beider Flächen. Der geometrische Ort dieser Punkte ist demnach mit der Gesamtheit der Hauptschnittpunkte aller Normalschnitte von Φ_1 und Φ_2 identisch; wir bezeichnen ihn als den *Hauptschnitt* $\Phi_1\,\Phi_2$. Die Gesamtheit aller übrigen Punkte, die Φ_1 und Φ_2 gemeinsam sind, möge *Nebenschnitt* genannt werden; jeder dieser Punkte stellt einen Nebenschnittpunkt zweier Normalschnitte von Φ_1, Φ_2 und zugleich einen Schnittpunkt zweier Schraublinien von Φ_1, Φ_2 dar, deren Achsen zwei *verschiedene* Erzeugende von Λ_i sind.

Da jede zyklische Schraubfläche nach Nr. 2 durch ∞^1 Paare koachsialer Trochoidenschraubungen erzeugbar ist, so gibt es bestimmte Trochoidenschraubungen $\mathfrak{T}_i$, durch die *sowohl Φ_1 als auch Φ_2* gewonnen werden kann. Die Trochoidenschraublinien k, die die Schnittpunkte P_0 der auf $\sigma_{i,0}$ liegenden Schraublinien von Φ_1 und Φ_2 bei diesen Bewegungen durchlaufen, gehören beiden Flächen an, sie bilden daher *einen Teil des Gesamtschnittes* $\Phi_1\,\Phi_2$. Da sich in jedem Punkte P_r der Kurven je zwei dem *gleichen* Drehzylinder σ_i angehörige exzentrische Schraublinien von Φ_1, Φ_2 treffen, so ist *die Gesamtheit dieser Trochoidenschraublinien mit dem Hauptschnitt $\Phi_1\,\Phi_2$ identisch.* Jede der Kurven durchsetzt π_1 in einem einzigen Punkt; *die Gesamtzahl der Kurven k ist also gleich der Anzahl der Hauptschnittpunkte $w_1\,w_2$.*

Die Geschoßhöhen $\mathfrak{G}'$, $\mathfrak{G}''$ von Φ_1, Φ_2 sind nach Nr. 2 die Maximalteiler von $\mathfrak{h}_i'$, $\mathfrak{s}'$ bzw. $\mathfrak{h}_i''$, $\mathfrak{s}''$. Die zueinander teilerfremden ganzen Zahlen a_i', b_i'; a_i'', b_i'', deren Quotienten die Modulwerte von w_1, w_2

sind, besitzen nach Gl. 9 die Werte

$$\begin{aligned} a_i' &= \mp \mathfrak{h}_i' : \mathfrak{G}' ; \qquad b_i' = \pm \mathfrak{s}' : \mathfrak{G}' \\ a_i'' &= \mp \mathfrak{h}_i'' : \mathfrak{G}'' ; \qquad b_i'' = \pm \mathfrak{s}'' : \mathfrak{G}'' \end{aligned} \tag{15}$$

(oberes Vorzeichen für $i = 1$, unteres für $i = 2$). Die Zahl der Hauptschnittpunkte $w_1\, w_2$ ist nach Gl. 11

$$N = \begin{vmatrix} a_i' & b_i' \\ a_i'' & b_i'' \end{vmatrix} \tag{16}$$

Um die Ganghöhe $\mathfrak{H}$ der Trochoidenschraublinien k, die zueinander teilerfremden ganzen Zahlen a_i, b_i, deren Quotienten die Modulwerte von k' darstellen und die durch Gl.

$$N' = \begin{vmatrix} a_i & b_i \\ a_i' & b_i' \end{vmatrix} ; \qquad N'' = \begin{vmatrix} a_i & b_i \\ a_i'' & b_i'' \end{vmatrix} \tag{17}$$

definierten Zahlen N', N'' zu bestimmen, die die Anzahl der Hauptschnittpuukte $k'\, w_1$, bzw. $k'\, w_2$ angeben, verwenden wir die aus Gl. 12 folgende Beziehung

$$\mathfrak{H} = N' \mathfrak{G}' = N'' \mathfrak{G}'' \tag{18}$$

Wir bezeichnen durch $\mathfrak{g}$ den Maximalteiler von $\mathfrak{G}'$, $\mathfrak{G}''$, erhalten mittels der Gl.

$$G' = \mathfrak{G}' : \mathfrak{g}; \qquad G'' = \mathfrak{G}'' : \mathfrak{g} \tag{19}$$

zwei zueinander teilerfremde ganze Zahlen G', G'' und bilden mit diesen die Determinanten

$$A_i = \begin{vmatrix} a_i' & a_i'' \\ G'' & G' \end{vmatrix} ; \qquad B_i = \begin{vmatrix} b_i' & b_i'' \\ G'' & G' \end{vmatrix} \tag{20}$$

Der Maximalteiler von A_i, B_i ist eine bestimmte Zahl T. Man findet sodann

$$a_i = \frac{A_i}{T}; \qquad b_i = \frac{B_i}{T} \tag{21}$$

$$N' = \frac{N}{T} \cdot G''; \quad N'' = \frac{N}{T} \cdot G' \tag{22}$$

$$\mathfrak{H} = \frac{N}{T} \cdot G'\, G''\, \mathfrak{g} \tag{23}$$

Die der Abb. 4 zugrundegelegten Werte sind in Tab. 4 zusammengestellt.

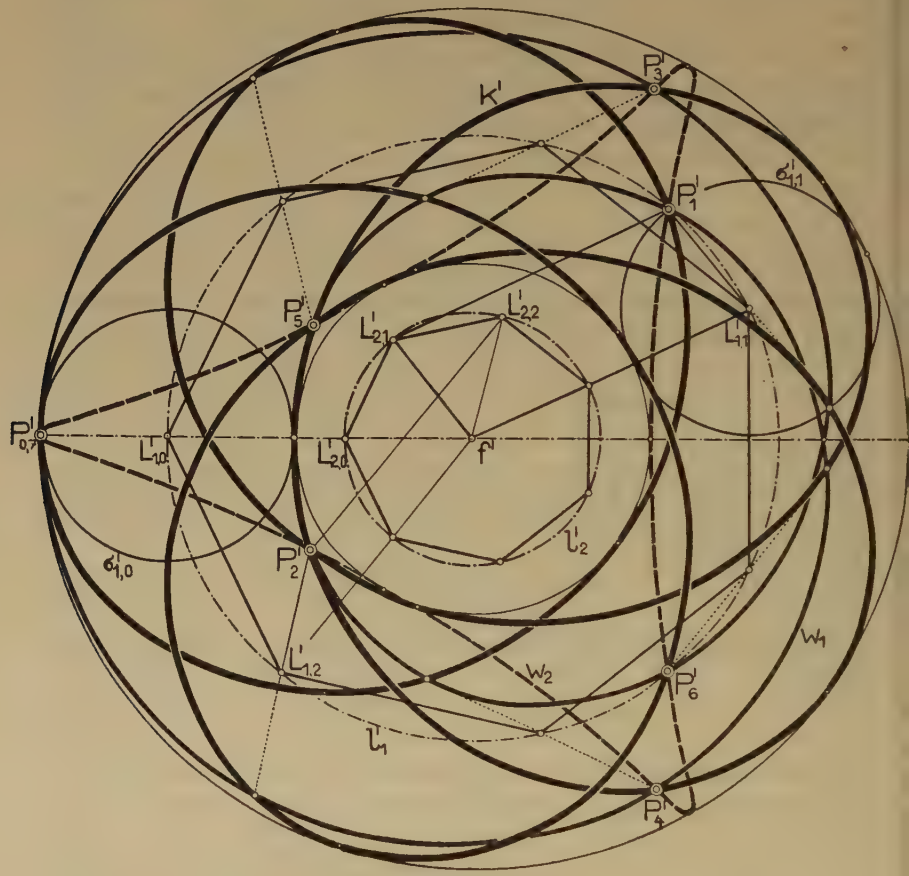

Abb. 4

Tabelle 4:

i	$\mathfrak{h}_i'$ $\mathfrak{s}'$	$\mathfrak{h}_i''$ $\mathfrak{s}''$	$\mathfrak{G}'$ $\mathfrak{G}''$	a_i' b_i'	a_i'' b_i''	N	g	G' G''	A_i B_i	T	a_i b_i	N' N''	$\mathfrak{H}$
1	−6 3	6 18	3 6	2 1	−1 3	7	3	1 2	4 −5	1	4 −5	14 7	42
2	9	12		3 −1	2 −3				−1 5		−1 5		

Die Flächen Φ_1, Φ_2 tragen je N' bzw. N'' einander im Grundriß deckende Trochoidenschraublinien von der Ganghöhe $\mathfrak{H}$. Da die Zahlen G', G'' relativ prim sind, so ist der Maximalteiler von N', N'' gleich N/T

(Gl. 22). Von den N Trochoidenschraublinien k, die den Hauptschnitt $\Phi_1 \Phi_2$ bilden, besitzen daher je N/T *den gleichen Grundriß*; m. a. W.: *Die N Kurven k bilden sich im Grundriß als T verschiedene Trochoiden k' ab.* Hieraus folgt, daß T nur 1, N oder *ein ganzzahliger Teiler von N* sein kann[10]. Demgemäß können wir folgende Fälle unterscheiden:

I. Wenn $T = 1$ ist, so besitzen alle N Kurven k *eine und dieselbe, durch sämtliche Hauptschnittpunkte w_1 w_2 laufende Trochoide zum Grundriß* (vgl. Abb. 4). Jeder dieser Punkte ist zugleich ein Hauptschnittpunkt von k' mit w_1 und w_2, aber es gibt nach Gl. 22 i. a. auch Hauptschnittpunkte k' w_1, bzw. k' w_2, die nicht zugleich Hauptschnittpunkte w_1 w_2 sind (bei dem in Abb. 4 dargestellten Beispiel ergeben sich für N', N'' wegen $G' = 1$, $G'' = 2$ die Werte $2N$ bzw. N).

II. Wenn T ein von 1 verschiedener Teiler von N ist, so gibt es T *verschiedene Trochoiden k'* und jede dieser Kurven trägt N/T Hauptschnittpunkte w_1 w_2 derart, daß die Gesamtheit der T Kurven k' sämtliche N Hauptschnittpunkte enthält. Je zwei Trochoiden k' sind um die Zentriwinkel $2\pi/T$ gegeneinander gedreht (vgl. die Ellipsen und Konchoiden in Abb. 5).

III. Wenn $T = N$ ist, so besitzen *alle Kurven k voneinander verschiedene Grundrisse k'* und jede dieser Kurven läuft durch *einen einzigen Hauptschnittpunkt* w_1 w_2; je zwei Kurven k' sind um die Winkel $2\pi/N$ gegeneinander gedreht.

Zusammenfassend kann somit gesagt werden

V: *Wenn die exzentrischen Schraublinien zweier zyklischer Schraubflächen Φ_1, Φ_2 denselben Drehzylindern angehören, so besteht ein Teil des Gesamtschnittes beider Flächen (der Hauptschnitt $\Phi_1 \Phi_2$) aus Trochoidenschraublinien. Sind die Normalschnitte w_1, w_2 der Flächen algebraisch, so besitzt die Anzahl dieser Kurven k einen festen, nur von den Modulwerten der Trochoiden w_1, w_2 abhängigen Wert N. Der Grundriß der Kurven ist entweder eine einzige Trochoide k' oder er umfaßt $T(\leqq N)$ verschiedene, symmetrisch verteilte Kurven. Im ersten Fall läuft k' durch alle Hauptschnittpunkte w_1 w_2; im zweiten Fall enthält jede Kurve k' nur N/T dieser Punkte.*

4. Trochoidenbüschel. Betrachtet man in den vorstehenden Gleichungen die Zahlen a_i', b_i'; a_i'', b_i'' als fest und wählt für G', G'' alle

[10] Dies ergibt sich auch ohne Berücksichtigung des geometrischen Zusammenhangs unmittelbar aus der unschwer zu beweisenden Tatsache, daß sich N als Linearkombination von A_i, B_i darstellen läßt.

möglichen, zueinander teilerfremden Paare ganzer Zahlen, so gelangt man zu *allen Trochoiden k', die mit den N Hauptschnittpunkten P_r' der beiden durch die Modulwerte $a_i' : b_i'$*, bzw. *$a_i'' : b_i''$ festgelegten Trochoiden w_1, w_2 inzident sind.* Wir wollen die Gesamtheit dieser Kurven als ein *Büschel mit den Grundpunkten P_r'* bezeichnen. Alle Büschelkurven besitzen die gleichen Leitkreise l_i'; die Zahlen a_i, b_i, die ihre Modulwerte bestimmen, ergeben sich aus den durch Gl. 20 definierten Größen A_i, B_i und deren Maximalteiler T gemäß Gl. 21; die Anzahlen N', N'' ihrer Hauptschnittpunkte mit w_1, bzw. w_2 sind durch Gl. 22 gegeben. Sicht man die Kurven w_1, w_2 als die in π_1 liegenden Normalschnitte zweier Schraubflächen Φ_1, Φ_2 an, so stellen sich die Grundpunkte des Büschels als die in π_1 befindlichen Spurpunkte der Trochoidenschraublinien k dar, die den Hauptschnitt $\Phi_1 \Phi_2$ bilden; jede Büschelkurve k' ist der Grundriß einer oder mehrerer dieser Kurven. Die Hauptschnitte je zweier Flächen, für die das Verhältnis ihrer Geschoßhöhen den gleichen Wert $G' : G''$ hat, besitzen wegen Gl. 19 denselben Grundriß. Je nach dem Wert von T unterscheiden wir folgende Gruppen von Büschelkurven:

I. Jedes Zahlenpaar G', G'', das *für T den Wert* 1 ergibt, legt *eine Trochoide k' fest, die durch sämtliche Grundpunkte P_r' des Büschels läuft.* Die Zahl der Hauptschnittpunkte k' w_1, k' w_2 ist G'' N, bzw. G' N; je N derselben sind die Punkte P_r'. Je zwei Flächen Φ_1, Φ_2, deren Geschoßhöhen zu G', G'' proportional sind, tragen G'' N, bzw. G' N äquidistant liegende Trochoidenschraublinien k, die k' zum Grundriß haben; N der Kurven bilden den Hauptschnitt $\Phi_1 \Phi_2$. Bei der in Abb. 5 gewählten Annahme ($N = 10$) ist als Repräsentant dieser Gruppe die durch $G' = 1$, $G'' = 2$ bestimmte Büschelkurve k' (eine Trochoide von Modul $-1 : 7$) samt ihren 20, bzw. 10 Hauptschnittpunkten mit w_1 und w_2 dargestellt (vgl. Tab. 5).

II. Wenn N keine Primzahl ist, so gibt es Zahlenpaare G', G'', die *für T einen von* 1 *verschiedenen ganzzahligen Teiler von N* ergeben. Durch jedes solche Zahlenpaar werden *T verschiedene, untereinander kongruente und gegeneinander um die Winkel $2\pi/T$ gedrehte Trochoiden* $k_1', k_2' \ldots$ definiert, deren jede N/T Grundpunkte des Büschels trägt, wobei keine zwei Kurven mit den gleichen Grundpunkten inzident sind, so daß die T Kurven *in ihrer Gesamtheit* die N Grundpunkte des Büschels enthalten. Die Zahl der Hauptschnittpunkte jeder Kurve $k_1', k_2' \ldots$ mit w_1 und w_2 ist G'' N/T, bzw. G' N/T; je N/T derselben sind Grundpunkte des Büschels. Bei dem in Abb. 5 wiedergegebenen

Beispiel sind als Vertreter dieser Kurvengruppe zwei Ellipsen k_1', k_2' (für $T = 2$) und zwei Konchoiden k_a', k_b' (für $T = 5$) samt ihren Haupt-

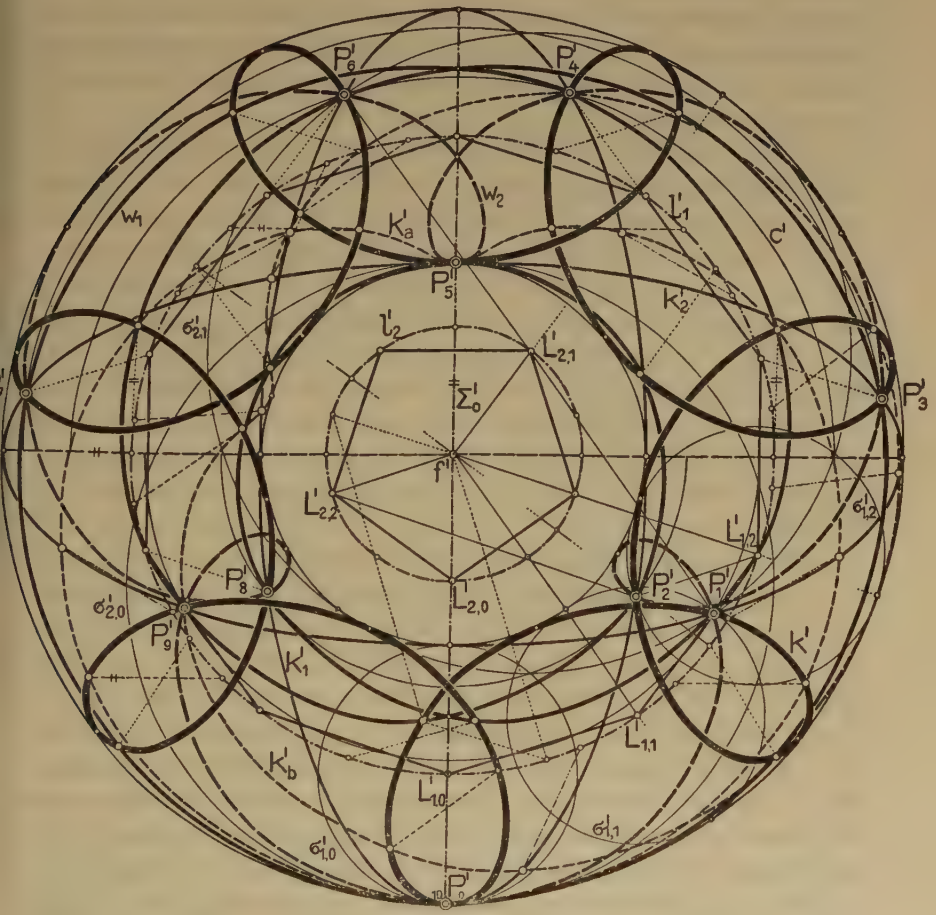

Abb. 5

schnittpunkten mit w_1 und w_2 dargestellt. Da die Zahlen G', G'', die die Ellipsen bestimmen, je gleich 1 sind, so bilden die fünf Grundpunkte des Büschels, durch die jede Ellipse läuft, zugleich ihre sämtlichen Hauptschnittpunkte mit w_1 und w_2. Die Konchoiden sind durch $G' = 1$, $G'' = -2$ definiert; die zwei Grundpunkte des Büschels, die jede Konchoide enthält, sind zugleich ihre sämtlichen Hauptschnittpunkte mit w_2; außer diesen besitzt sie noch zwei Hauptschnittpunkte mit w_1

(vgl. Tab. 5). In der Abbildung sind überdies alle Hauptschnittpunkte der Trochoide k' mit den gezeichneten Ellipsen und Konchoiden, sowie die der letzteren untereinander in Verbindung mit ihren ersten Leitpunkten eingetragen. Da je ein Hauptschnittpunkt der dargestellten Kurvenpaare ein Grundpunkt des Büschels ist, so können alle übrigen mittels der Leitpolygone nach Nr. 2 konstruiert werden, wie der Abbildung zu entnehmen ist.

III. Durch jedes Zahlenpaar G', G'', das *für T den Wert N* ergibt, werden N *verschiedene, symmetrisch verteilte Trochoiden* k' definiert, deren jede *einen einzigen* Grundpunkt des Büschels enthält, wobei wiederum keine zwei der Kurven durch den gleichen Grundpunkt laufen. Jede Kurve hat mit w_1 bzw. w_2 insgesamt G'', bzw. G' Hauptschnittpunkte gemein; einer derselben ist ein Grundpunkt des Büschels. Je zwei Flächen Φ_1, Φ_2, deren Geschoßhöhen zu den Zahlen G', G'' proportional sind, tragen G'', bzw. G' Trochoidenschraublinien, die eine der N Kurven k' zum Grundriß haben; eine dieser Kurven gehört dem Hauptschnitt $\Phi_1 \Phi_2$ an. In Abb. 5 sind Trochoiden dieser Gruppe nicht dargestellt, da sie gegenüber den Kurven der Gruppe II nichts wesentlich Neues bieten.

Wählt man zur Bestimmung einer Büschelkurve an Stelle von G', G'' *die Zahlen* a_i, b_i, *die ihre Modulwerte definieren*, so erhält man aus diesen zunächst mittels Gl. 17 die Zahlen N', N''; der Maximalteiler von N', N'' stellt wegen Gl. 22 den Quotienten N/T dar, aus der Konstanz von N folgt hieraus T sowie das Zahlenpaar G', G''. Man erkennt somit, daß im Büschel *Trochoiden von jedem rationalen Modulwert* vertreten sind; je nach dem Wert von T gibt es entweder *eine einzige Kurve oder* T ($\leqq N$) *voneinander verschiedene Trochoiden von einem und demselben Modul.* Durch die Annahme $a_i = 0$ oder $b_i = 0$ werden die drei Scharen der im Büschel enthaltenen *Kreise* definiert; diese stellen je einen aus *Euklidischen Schraublinien* bestehenden Hauptschnitt zweier durch w_1, bzw. w_2 laufenden Schraubflächen dar (vgl. Nr. 2, vor Gl. 11). Bei dem in Abb. 5 gewählten Beispiel gehören die durch $a_1 = 0$ definierten Kreise $\sigma'_{1,r}$, deren Mitten die Leitpunkte $L'_{1,r}$ der Punkte P'_r sind, sowie die durch $b_i = 0$ bestimmten Kreise c' um f' zur Gruppe III ($T = 10$); die ersteren sind durch $G' = 1$, $G'' = 3$, die letzteren durch $G' = 3$, $G'' = -1$ festgelegt (die Tatsache, daß die Zahl der mit den Punkten P'_r inzidenten Kreise um f' kleiner als zehn ist, wird durch die symmetrische Anordnung dieser Punkte bewirkt). Die durch $a_2 = 0$ (oder $a_1 = 1$, $b_1 = -1$) bestimmten Kreise $\sigma'_{2,r}$, deren

Mitten die Leitpunkte $L'_{2,r}$ sind, gehören zur Gruppe II ($T = 5$). Dies folgt schon aus dem Umstand, daß die Punkte $L'_{2,r}$ wegen des gemeinsamen Teilers 2 von a_2', a_2'' ein Fünfeck bilden (vgl. Nr. 2), so daß je zwei Punkte P_r' bezüglich einer Ecke desselben symmetrisch liegen (z. B. P_1' und P_6' bezüglich $L'_{2,1}$); diese Kreise sind durch $G' = 2$, $G'' = 1$ bestimmt.

i	a_i'	b_i'	a_i''	b_i''	N
1	3	−1	1	3	10
2	2	1	4	−3	

Tabelle 5:

Kurve	i	G'	G''	A_i	B_i	T	a_i	b_i	N'	N''
k'	1	1	2	1	−7	1	1	−7	20	10
	2			−6	7		−6	7		
k_1', k_2'	1	1	1	2	−4	2	1	−2	5	5
	2			−2	4		−1	2		
k_a', k_b'	1	1	−2	5	5	5	1	1	4	2
	2			10	−5		2	−1		
$\sigma'_{1,r}$	1	2	1	5	−5	5	1	−1	2	4
	2			0	5		0	1		
$\sigma'_{2,r}$	1	1	3	0	−10	10	0	−1	3	1
	2			−10	10		−1	1		
c'	1	3	−1	10	0	10	1	0	1	3
	2			10	0		1	0		

Betrachtet man das Büschel durch *eine Trochoide k' und seine Grundpunkte P_r'* gegeben (d. h. N Punkte von k', deren Leitpunkte je ein regelmäßiges Polygon bilden), so kann man k' als *gemeinsamen Grundriß von N äquidistanten Trochoidenschraublinien k*, die Punkte P_r' als deren in π_1 liegende *Spurpunkte* und jede Büschelkurve als den in π_1 befindlichen *Normalschnitt einer Schraubfläche* deuten, die mit mindestens einer jener Raumkurven inzident liegt. Die Gesamtheit dieser Flächen bildet ein *Büschel mit den Grundkurven k*. Das in π_1 liegende Trochoidenbüschel stellt einen ebenen Schnitt desselben dar; seine Kurven gewinnen hiebei folgende Bedeutung:

I. Jede Trochoide w_x, die durch *alle* Grundpunkte des Büschels läuft, stellt den Normalschnitt einer Fläche Φ_x dar, die *alle N* Trochoidenschraublinien k enthält. Ist die Zahl N_x der Hauptschnittpunkte k' w_x ein ganzzahliges Vielfaches GN von N, so gibt sie zugleich die Anzahl

aller auf Φ_x liegenden Trochoidenschraublinien an, die k' zum Grundriß haben. N derselben sind die Grundkurven des Büschels; von den übrigen liegen je $G-1$ zwischen zwei aufeinanderfolgenden Kurven k in einander gleichen, die Geschoßhöhe $\mathfrak{G}_x$ von Φ_x darstellenden Abständen; die Ganghöhe $\mathfrak{H}$ der Kurven k ist gleich $N_x \mathfrak{G}_x$.

II. Wenn T *voneinander verschiedene*, einander kongruente und symmetrisch verteilte Trochoiden w_x in der oben beschriebenen Weise in ihrer Gesamtheit die N Grundpunkte des Trochoidenbüschels enthalten, so stellt jede dieser Kurven den Normalschnitt einer Fläche Φ_x dar, die nur N/T *Grundkurven des Flächenbüschels* trägt; es gibt also T *verschiedene, einander kongruente Schraubflächen Φ_x, die mit der Gesamtheit aller N Trochoidenschraublinien k inzident sind.* Die Zahl $N_x = NG/T$ der Hauptschnittpunkte einer dieser Kurven w_x mit k' gibt zugleich die Anzahl der Trochoidenschraublinien mit dem Grundriß k' an, die der durch w_x bestimmten Büschelfläche Φ_x angehören; die Geschoßhöhe von Φ_x ist $\mathfrak{H}/N_x = T\mathfrak{H}/NG$.

III. Im Falle $T = N$ ergeben sich je N Trochoiden w_x in π_1, deren jede nur *einen einzigen* Grundpunkt des Büschels enthält; diese Kurven stellen die Normalschnitte von N *verschiedenen, einander kongruenten Flächen dar, deren jede eine einzige der N Trochoidenschraublinien k trägt.* Jede der Kurven w_x hat mit k' insgesamt $N_x = G$ Hauptschnittpunkte gemein; die mit w_x inzidente Büschelfläche Φ_x enthält G Trochoidenschraublinien mit dem Grundriß k'. Die Geschoßhöhe von Φ_x ist $\mathfrak{H}/G$.

Zusammenfassend können wir sohin feststellen

VI: *Die Hauptschnitte je zweier zyklischer Schraubflächen, deren exzentrische Schraublinien denselben Drehzylindern angehören und deren in π_1 liegende Normalschnitte zwei feste algebraische Trochoiden w_1, w_2 sind, bilden sich im Normalriß auf π_1 als die sämtlichen Trochoiden eines Büschels ab, dessen Grundpunkte die N Hauptschnittpunkte w_1 w_2 sind. Im Büschel sind Kurven von allen möglichen rationalen Modulwerten vertreten; je nach dem Wert desselben ist die Zahl T der Büschelkurven, die mit allen Grundpunkten inzident liegen, gleich* 1 *oder einem von* 1 *verschiedenen Teiler von N bzw. gleich N selbst. Im Falle $N > 1$ sind alle durch den gleichen Modul bestimmten Trochoiden symmetrisch verteilt. Deutet man die Grundpunkte des Büschels als Spurpunkte von N äquidistanten, einander im Normalriß auf π_1 deckenden Trochoidenschraublinien, so stellt sich das Trochoidenbüschel als ebener Schnitt des Büschels aller zyklischen Schraubflächen dar, deren jede entweder mit allen N, bzw. T oder einer einzigen dieser Kurven inzident ist.*

Unendliche orthogonale Matrizen und Laguerresche Matrizen

Von

Peter Lesky, Innsbruck*

(*Eingegangen am 20. März 1958*)

I. Allgemeine Sätze über unendliche orthogonale Matrizen

1. Orthogonalitätsbedingungen. — 2. Abgeschlossenheit. — 3. Darstellungssatz. — 4. Vollständigkeit. — 5. Abgeschlossenheitstheorem von Vitali. — 6. Erweiterung auf orthogonale Funktionensysteme.

1. **Definition 1:** *Die aus den reellen Zahlen* $r_{\nu n}$ $(\nu, n=1, 2, 3, \ldots)$ *gebildete unendliche Matrix*

$$\mathfrak{R} = (r_{\nu n}) = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & \cdots \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & \cdots \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

heißt orthogonal, wenn die Orthogonalitäts- und Normierungsbedingungen (im folgenden kurz ON-Bedingungen)

$$\mathfrak{R}\,\tilde{\mathfrak{R}} = \mathfrak{E}, \text{ d. h. } \sum_{n=1}^{\infty} r_{\nu n}\, r_{\mu n} = \delta_{\nu\mu} \tag{1}$$

und

$$\tilde{\mathfrak{R}}\,\mathfrak{R} = \mathfrak{E}, \text{ d. h. } \sum_{\nu=1}^{\infty} r_{\nu n}\, r_{\nu m} = \delta_{nm} \tag{2}$$

für das System der Zeilen- beziehungsweise Spaltenvektoren erfüllt sind, wobei

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 0 \text{ für } i \neq k \\ 1 \text{ für } i = k \end{cases}$$

ist[1].

* Mathematisches Institut der Universität Innsbruck.

[1] Die Bezeichnungen für den Matrizenkalkül wurden [1] entnommen.

2. **Definition 2:** *Einen unendlichen Vektor* $\tilde{\mathfrak{x}} = (x_1, x_2, x_3, \ldots)$ *mit reellen Komponenten nennen wir zulässig, wenn*

$$\tilde{\mathfrak{x}}\,\mathfrak{x} = |\,\mathfrak{x}\,|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2$$

konvergiert. Erfüllt nun die Matrix $\mathfrak{R} = (r_{\nu n})$ die erste *ON*-Bedingung (1), dann kann der Vektor $\mathfrak{R}.\mathfrak{x}$ mit den Komponenten

$$\sum_{n=1}^{\infty} r_{\nu n}\, x_n, \qquad \nu = 1, 2, 3, \ldots \tag{3}$$

gebildet werden, denn die **Schwarzsche Ungleichung**

$$\Big(\sum_{n=1}^{N} |\, r_{\nu n}\, x_n\,|\Big)^2 \leqq \sum_{n=1}^{N} r_{\nu n}^2 \sum_{n=1}^{N} x_n^2 \leqq \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 \tag{4}$$

zeigt die absolute Konvergenz aller unendlichen Reihen (3); daß er auch zulässig ist, wird später bewiesen werden (Satz 3).

Definition 3: *Wir nennen das System der Zeilenvektoren* $\{r_{\nu 1}, r_{\nu 2}, \ldots\}$ $\nu = 1, 2, 3, \ldots$ *der Matrix* $\mathfrak{R} = (r_{\nu n})$ **abgeschlossen,** *wenn für jeden beliebigen zulässigen Vektor* $\tilde{\mathfrak{x}} = (x_1, x_2, x_3, \ldots)$ *aus*

$$\mathfrak{R}\,\mathfrak{x} = 0, \text{ d. h. } \sum_{n=1}^{\infty} r_{\nu n}\, x_n = 0, \qquad \nu = 1, 2, 3, \ldots \tag{5}$$

immer

$$\mathfrak{x} = 0, \text{ d. h. } \quad x_n = 0, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{5'}$$

folgt. Dann gilt der

Satz 1: *Genügt die unendliche Matrix* $\mathfrak{R} = (r_{\nu n})$ *beiden ON-Bedingungen* (1) *und* (2), *dann ist das System ihrer Zeilenvektoren abgeschlossen* und der noch schärfere

Satz 2: *Genügt die unendliche Matrix* $\mathfrak{R} = (r_{\nu n})$ *der ersten ON-Bedingung* (1), *dann ist die zweite ON-Bedingung* (2) *der Abgeschlossenheit des Systems ihrer Zeilenvektoren äquivalent.*

Beweis: a) Aus (1) und (2) folgt (5) (5'), denn mit (1) ist $\mathfrak{R}.\mathfrak{x}$ sinnvoll und aus $\mathfrak{R}.\mathfrak{x} = 0$ folgt

$$\tilde{\mathfrak{R}}\,\mathfrak{R}\,\mathfrak{x} = \mathfrak{E}\,\mathfrak{x} = \mathfrak{x} = 0.$$

b) Aus (1) und (5) (5') folgt (2), denn $\mathfrak{R}\,\tilde{\mathfrak{R}} = \mathfrak{E}$ ergibt

$$(\mathfrak{R}\,\tilde{\mathfrak{R}})\,\mathfrak{R} = \mathfrak{R}(\tilde{\mathfrak{R}}\,\mathfrak{R}) = \mathfrak{R},$$

also

$$\mathfrak{R}(\tilde{\mathfrak{R}}\,\mathfrak{R} - \mathfrak{E}) = 0.$$

Dies kann aber auf Grund der Abgeschlossenheit nur dann gelten, wenn $\tilde{\mathfrak{R}}\,\mathfrak{R} = \mathfrak{E}$ ist.

Da die erste (bzw. zweite) *ON*-Bedingung für die Matrix $\mathfrak{R} = (r_{\nu n})$ der zweiten (bzw. ersten) *ON*-Bedingung für die transponierte Matrix $\tilde{\mathfrak{R}} = (r_{n\nu})$ gleichbedeutend ist, folgt aus der Voraussetzung des Satzes 1 auch die Abgeschlossenheit des Systems der Spaltenvektoren der Matrix $\mathfrak{R} = (r_{\nu n})$. Eine unendliche orthogonale Matrix ist also in diesem Sinne **abgeschlossen.**

3. **Satz 3:** *Genügt die Matrix* $\mathfrak{R} = (r_{\nu n})$ *der ersten ON-Bedingung* (1) *und bilden wir mit einem beliebigen zulässigen Vektor* $\tilde{\mathfrak{a}} = (a_1, a_2, \ldots)$ *den (dann sinnvollen) Vektor* $\gamma = \mathfrak{R}.\mathfrak{a}$ *mit den Komponenten*

$$\gamma_\nu = \sum_{n=1}^{\infty} r_{\nu n}\, a_n, \qquad \nu = 1, 2, 3, \ldots, \tag{6}$$

den wir als den zu $\mathfrak{a}$ *gehörenden* **Fourierschen Vektor** *bezeichnen, so ist dieser ebenfalls zulässig.*

Beweis: Aus der **Besselschen Ungleichung**

$$\sum_{n=1}^{\infty} [a_n - \sum_{\nu=1}^{N} \gamma_\nu\, r_{\nu n}]^2 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 - 2 \sum_{\nu=1}^{N} \gamma_\nu \sum_{n=1}^{\infty} a_n . r_{\nu n} + \sum_{\nu,\mu=1}^{N} \gamma_\nu \gamma_\mu \sum_{n=1}^{\infty} r_{\nu n}\, r_{\mu n} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 - \sum_{\nu=1}^{N} \gamma_\nu^2 \geqq 0 \tag{7}$$

folgt

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \gamma_\nu^2 \leqq \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2, \tag{8}$$

das heißt mit Verwendung des Matrizenkalküls

$$\tilde{\gamma}\,\gamma = \tilde{\mathfrak{a}}\,\tilde{\mathfrak{R}}\,\mathfrak{R}\,\mathfrak{a} \leqq \tilde{\mathfrak{a}}\,\mathfrak{a}, \tag{8'}$$

also die Zulässigkeit von γ.

Satz 4[2]**:** *Ist die Matrix* $\mathfrak{R} = (r_{\nu n})$ *orthogonal, dann gibt es zu jedem beliebig vorgegebenen zulässigen Vektor* γ *eindeutig einen Vektor* $\mathfrak{a}$, *so daß* γ *der Fouriersche Vektor von* $\mathfrak{a}$ *bezüglich* $\mathfrak{R}$ *ist.*

Zu einem zulässigen Vektor γ soll also ein Vektor $\mathfrak{a}$ gesucht werden, so daß

$$\gamma = \mathfrak{R}\,.\,\mathfrak{a}$$

gilt. Wir behaupten nun, daß der Vektor $\mathfrak{a} = \tilde{\mathfrak{R}}\,\gamma$ der gesuchte Vektor ist. Da nämlich $\mathfrak{R}$ der zweiten *ON*-Bedingung genügt, erfüllt $\tilde{\mathfrak{R}}$ die erste und $\tilde{\mathfrak{R}}\,\gamma$ ist daher zulässig. Aus $\mathfrak{a} = \tilde{\mathfrak{R}}\,\gamma$ und der ersten *ON*-Bedingung für $\mathfrak{R}$ folgt dann

$$\mathfrak{R}\,.\,\mathfrak{a} = \mathfrak{R}\,\tilde{\mathfrak{R}}\,\gamma = \mathfrak{E}\,\gamma = \gamma.$$

---

[2] Analog dem Satz von *Fischer Rieß*, siehe etwa [2], S. 23, oder [3], S. 23.

Dieser Vektor $\mathfrak{a}$ ist eindeutig bestimmt, denn für jeden Vektor $\mathfrak{a}^*$ mit

$$\gamma = \mathfrak{R} \,.\, \mathfrak{a}^*$$

folgt

$$\mathfrak{R}(\mathfrak{a} - \mathfrak{a}^*) = 0,$$

also $\mathfrak{a} - \mathfrak{a}^* = 0$ wegen der Abgeschlossenheit von $\mathfrak{R}$, das heißt aber $\mathfrak{a}^* = \mathfrak{a}$.

Indem wir Satz 3 und Satz 4 zusammenfassen, können wir nun folgenden **Darstellungssatz** formulieren:

Satz 5: *Ist* $\mathfrak{R} = (r_{\nu n})$ *ein abgeschlossenes unendliches Vektorsystem,* $\mathfrak{a}$ *ein zulässiger Vektor, dann gibt es eine eindeutige Darstellung*

$$\mathfrak{a} = \tilde{\mathfrak{R}}.\gamma, \text{ d. h. } a_n = \sum_{\nu=1}^{\infty} r_{\nu n}\, \gamma_\nu, \quad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

wobei der zu $\mathfrak{a}$ *gehörende Fouriersche Vektor* γ *durch*

$$\gamma = \mathfrak{R}.\mathfrak{a}, \text{ d. h. } \gamma_\nu = \sum_{n=1}^{\infty} r_{\nu n}\, a_n, \quad \nu = 1, 2, 3, \ldots$$

gegeben ist.

4. **Definition 4:** *Wenn in der Besselschen Ungleichung* (7) *für jeden zulässigen Vektor* $\mathfrak{a}$ *und jedes zugehörige* γ *das Gleichheitszeichen gilt, dann heißt das System der Zeilenvektoren* $(r_{\nu 1}, r_{\nu 2}, \ldots)$ *vollständig; aus der Besselschen Ungleichung wird dann die* **Parsevalsche Gleichung**

$$\tilde{\mathfrak{a}}\, \tilde{\mathfrak{R}}\, \mathfrak{R}\, \mathfrak{a} = \tilde{\mathfrak{a}}\, \mathfrak{a}. \tag{9}$$

Es gilt der

Satz 6: *Genügt die unendliche Matrix* $\mathfrak{R} = (r_{\nu n})$ *der ersten ON-Bedingung* (1), *dann ist die zweite ON-Bedingung* (2) *der Vollständigkeit des Systems ihrer Zeilenvektoren äquivalent, woraus dann nach Satz* 2 *die Äquivalenz von Vollständigkeit und Abgeschlossenheit folgt.*

Beweis: a) Aus (1) und (2) folgt (9), denn gilt die erste *ON*-Bedingung, dann ist die Bildung von $\tilde{\mathfrak{a}}\,.\,\tilde{\mathfrak{R}}$ bzw. $\mathfrak{R}\,.\,\mathfrak{a}$ sinnvoll, während die zweite *ON*-Bedingung $\tilde{\mathfrak{R}}\, \mathfrak{R} = \mathfrak{E}$ gerade die Gültigkeit von (9) bewirkt.

b) Andrerseits folgt aus (1) und (9) die Bedingung (2). Bilden wir mit einem beliebigen zulässigen Vektor $\mathfrak{x}$ das wegen (1) sinnvolle Produkt $\mathfrak{R}\,\mathfrak{x}$ und ist

$$\mathfrak{R}\,\mathfrak{x} = 0,$$

dann folgt daraus wegen der Vollständigkeit (9)

$$\tilde{\mathfrak{x}}\, \tilde{\mathfrak{R}}\, \mathfrak{R}\, \mathfrak{x} = \tilde{\mathfrak{x}}\, \mathfrak{x} = 0,$$

also $\mathfrak{x} = 0$, d. h. die Abgeschlossenheit des Systems der Zeilenvektoren von $\mathfrak{R}$ und damit nach Satz 2 die zweite *ON*-Bedingung.

Ebenso wie bei der Abgeschlossenheit können wir hier aus der Erfüllung der beiden *ON*-Bedingungen auch auf die Vollständigkeit des Systems der Spaltenvektoren schließen; eine unendliche orthogonale Matrix kann also in diesem Sinne **vollständig** und **abgeschlossen** genannt werden.

5. **Satz 7**[3]: *Genügt die unendliche Matrix* $\mathfrak{R} = (r_{\nu n})$ *der ersten ON-Bedingung, dann ist für die Abgeschlossenheit des Systems ihrer Zeilenvektoren die Gültigkeit von*

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} [\sum_{n=1}^{m} r_{\nu n}]^2 = m, \quad m = 1, 2, 3, \ldots \tag{10}$$

notwendig und hinreichend.

Beweis: a) Aus der Abgeschlossenheit des Systems ihrer Zeilenvektoren und nach Satz 5 folgt die Parsevalsche Gleichung (9), d. h. für $\tilde{\mathfrak{a}} = (a_1, a_2, \ldots)$

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} [\sum_{n=1}^{\infty} r_{\nu n}\, a_n]^2 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2. \tag{9'}$$

Setzt man darin für $\mathfrak{a}$ der Reihe nach $\mathfrak{a}_m = (\overbrace{1, 1, \ldots, 1}^{m}, 0, 0, \ldots)$, $m = 1, 2, \ldots$, so erhält man gerade die Bedingungen (10).

b) Umgekehrt gelte (10) und $\mathfrak{R}$ wäre nicht abgeschlossen, dann gibt es einen zulässigen Vektor $\mathfrak{x} \neq 0$, für den $\mathfrak{R}\,\mathfrak{x} = 0$ gilt. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit nehmen wir $\tilde{\mathfrak{x}}\,\mathfrak{x} = 1$ an; dann gilt für die Matrix

$$\mathfrak{R}^* = \begin{pmatrix} \tilde{\mathfrak{x}} \\ \cdots\cdots \\ \mathfrak{R} \end{pmatrix}$$

die erste Orthogonalitätsbedingung $\mathfrak{R}^*\,\tilde{\mathfrak{R}}^* = \mathfrak{E}$ und daher für jeden zulässigen Vektor $\mathfrak{a}$ die Besselsche Ungleichung

$$\tilde{\mathfrak{a}}\,\tilde{\mathfrak{R}}^*\,\mathfrak{R}^*\,\mathfrak{a} \leqq \tilde{\mathfrak{a}}\,\mathfrak{a},$$

also wegen

$$\tilde{\mathfrak{a}}(\mathfrak{x} \mid \tilde{\mathfrak{R}}) \begin{pmatrix} \mathfrak{x} \\ \cdots\cdots \\ \mathfrak{R} \end{pmatrix} \mathfrak{a} = (\tilde{\mathfrak{a}}\,\mathfrak{x} \mid \tilde{\mathfrak{a}}\,\tilde{\mathfrak{R}}) \begin{pmatrix} \tilde{\mathfrak{x}}\mathfrak{a} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \mathfrak{R}\mathfrak{a} \end{pmatrix} = \tilde{\mathfrak{a}}\,\mathfrak{x}\,\tilde{\mathfrak{x}}\,\mathfrak{a} + \tilde{\mathfrak{a}}\,\tilde{\mathfrak{R}}\,\mathfrak{R}\,\mathfrak{a}$$

die Ungleichung

$$|\,\tilde{\mathfrak{a}}\,\mathfrak{x}\,|^2 + \tilde{\mathfrak{a}}\,\tilde{\mathfrak{R}}\,\mathfrak{R}\,\mathfrak{a} \leqq \tilde{\mathfrak{a}}\,\mathfrak{a}.$$

Da nach Annahme für die (zulässigen) Vektoren $\mathfrak{a}_m$

[3] Entspricht dem Vollständigkeitstheorem von *Vitali* [4], S. 25.

$$\tilde{\mathfrak{a}}_m \tilde{\mathfrak{R}} \mathfrak{R} \mathfrak{a}_m = \tilde{\mathfrak{a}}_m \mathfrak{a}_m, \quad m = 1, 2, 3, \ldots \tag{10'}$$

gilt, muß $|\tilde{\mathfrak{a}}_m \mathfrak{x}|^2 = 0$, d. h. $\tilde{\mathfrak{a}}_m \mathfrak{x} = 0$ für jedes m sein. Daraus folgt aber sukzessive $x_1 = x_2 = x_3 = \ldots = 0$, also $\mathfrak{x} = 0$ und somit die Abgeschlossenheit von $\mathfrak{R}$.

6. Es sei

$$\tilde{\Phi} = (\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots)$$

ein im Intervall [a, b] vollständiges normiertes orthogonales Funktionensystem und $\mathfrak{R}$ eine unendliche orthogonale Matrix. Da für jedes $\nu = 1, 2, 3, \ldots$ die Summe $\sum_{n=1}^{\infty} r_{\nu n}^2$ konvergiert, gibt es nach dem Satz von **Fischer Rieß**[4] eine bis auf Nullfunktionen eindeutig bestimmte, in [a, b] quadratisch integrierbare Funktion $\psi_\nu(x)$, deren Fourierkoeffizienten bezüglich des Systems $\tilde{\Phi}$ die $r_{\nu n}$ sind, d. h. es gilt

$$r_{\nu n} = \int_a^b \psi_\nu(x)\, \varphi_n(x)\, dx, \quad \nu, n = 1, 2, 3, \ldots. \tag{11}$$

Dabei konvergiert die Folge der Partialsummen $\sum_{n=1}^{N} r_{\nu n} \varphi_n(x)$ im Mittel gegen $\psi_\nu(x)$

$$\lim_{N \to \infty} \int_a^b [\psi_\nu(x) - \sum_{n=1}^{N} r_{\nu n} \varphi_n(x)]^2\, dx = 0. \tag{12}$$

Das System $\tilde{\Psi} = (\psi_1(x), \psi_2(x), \ldots)$ (das also bis auf Nullfunktionen eindeutig bestimmt ist) wollen wir symbolisch mit

$$\Psi = \mathfrak{R}.\Phi \tag{13}$$

bezeichnen. Es gilt

Satz 8: *Wenn $\mathfrak{R}$ eine unendliche orthogonale Matrix und Φ ein im Intervall* [a, b] *vollständiges normiertes orthogonales Funktionensystem ist, dann ist auch $\Psi = \mathfrak{R}.\Phi$ ein in* [a, b] *vollständiges normiertes orthogonales Funktionensystem.*

Beweis: a) Aus der Schwarzschen Ungleichung

$$\left| \int_a^b [\psi_\nu(x) - \sum_{n=1}^{N} r_{\nu n} \varphi_n(x)]\, [\psi_\mu(x) - \sum_{m=1}^{N} r_{\mu m} \varphi_m(x)]\, dx \right| \leqq$$

$$\leqq \left\{ \int_a^b [\psi_\nu(x) - \sum_{n=1}^{N} r_{\nu n} \varphi_n(x)]^2\, dx \right\}^{\frac{1}{2}} \cdot \left\{ \int_a^b [\psi_\mu(x) - \sum_{m=1}^{N} r_{\nu m} \varphi_m(x)]^2\, dx \right\}^{\frac{1}{2}}$$

folgt wegen (12), daß der Ausdruck

[4] Vgl. [2], S. 23.

$$\int_a^b \psi_\nu(x)\,\psi_\mu(x)\,dx - \sum_{n=1}^{N} r_{\nu n} \int_a^b \varphi_n(x)\,\psi_\mu(x)\,dx - \sum_{m=1}^{N} r_{\mu m} \int_a^b \varphi_m(x)\,\psi_\nu(x)\,dx +$$
$$+ \sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{N} r_{\nu m}\, r_{\mu m} \int_a^b \varphi_n(x)\,\varphi_m(x)\,dx = \int_a^b \psi_\nu(x)\,\psi_\mu(x)\,dx - \sum_{n=1}^{N} r_{\nu n}\, r_{\mu n}$$

mit wachsendem N gegen null strebt. Also ist

$$\int_a^b \psi_\nu(x)\,\psi_\mu(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} r_{\nu n}\, r_{\mu n} = \delta_{\nu\mu} \qquad \nu, \mu = 1, 2, 3, \ldots,$$

d. h. es gelten die Orthogonalitäts- und Normierungsbedingungen für das Funktionensystem Ψ.

b) Es sei $f(x)$ eine in [a, b] quadratisch integrierbare Funktion und $\tilde{c} = (c_1, c_2, \ldots)$ das System ihrer Fourierkoeffizienten in Bezug auf Φ, d. h.

$$c_n = \int_a^b f(x)\,\varphi_n(x)\,dx, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Wegen der Vollständigkeit von Φ gilt die Parsevalsche Gleichung

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 = \int_a^b f(x)^2\,dx,$$

und c ist daher ein zulässiger Vektor. Entsprechend sei $\tilde{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots)$ der (zulässige) Vektor der Fourierkoeffizienten von $f(x)$ bezüglich Ψ, d. h.

$$\gamma_\nu = \int_a^b f(x)\,\psi_\nu(x)\,dx, \qquad \nu = 1, 2, 3, \ldots.$$

Mit

$$S_{\nu N} = \sum_{n=1}^{N} r_{\nu n}\, c_n = \sum_{n=1}^{N} r_{\nu n} \int_a^b f(x)\,\varphi_n(x)\,dx = \int_a^b f(x) \sum_{n=1}^{N} r_{\nu n}\,\varphi_n(x)\,dx,$$
$$\nu = 1, 2, 3, \ldots$$

erhalten wir durch Anwendung der Schwarzschen Ungleichung

$$|S_{\nu N} - \gamma_\nu| = \left| \int_a^b f(x)\,[\sum_{n=1}^{N} r_{\nu n}\,\varphi_n(x) - \psi_\nu(x)]\,dx \right| \leqq$$
$$\leqq \left[\int_a^b f(x)^2\,dx\right] \cdot \int_a^b [\sum_{n=1}^{N} r_{\nu n}\,\varphi_n(x) - \psi_\nu(x)]^2\,dx]^{\frac{1}{2}}$$

und daher wegen (12)

$$\lim_{N\to\infty} [S_{\nu N} - \gamma_\nu] = 0,$$

das heißt

$$\gamma_\nu = \sum_{n=1}^{\infty} r_{\nu n}\, c_n, \qquad \nu = 1, 2, 3, \ldots.$$

Es gilt also für die Vektoren γ, $\mathfrak{c}$

$$\gamma = \mathfrak{R} \,.\, \mathfrak{c}$$

und somit

$$\tilde{\gamma}\,\gamma = \tilde{\gamma}\,\tilde{R}\,R\,\gamma = \tilde{\mathfrak{c}}\,\mathfrak{c},$$

woraus

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \gamma_\nu^2 = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 = \int_a^b f(x)^2\,dx$$

wegen der Vollständigkeit von Φ folgt. Da dies für jede in [a, b] quadratisch integrierbare Funktion $f(x)$ gilt, ist das Orthogonalsystem $\Psi = \mathfrak{R} \,.\, \Phi$ in [a, b] vollständig.

Der Satz 8 bietet die Möglichkeit, aus einem gegebenen Orthogonalsystem neue Orthogonalsysteme zu bilden. Es soll einer weiteren Arbeit vorbehalten bleiben, die Bildung solcher Orthogonalsysteme vorzunehmen und zu untersuchen.

II. Laguerresche Matrizen

Im zweiten Teil dieser Arbeit sollen unendliche orthogonale Matrizen nach einem Verfahren konstruiert werden, das auf einem Variationsprinzip beruht. Dieses Verfahren ist analog einer von *W. Gröbner* [5] für orthogonale Funktionensysteme angegebenen Methode.

Die Zeilen dieser unendlichen orthogonalen Matrizen stehen in Analogie zu den bekannten *Laguerreschen* Polynomen. Diese Analogie besteht darin, daß an Stelle von Integralen unendliche Summen (mit passend gewählten Gewichtsfunktionen), an Stelle von Differentialen und Differentialgleichungen Differenzen und Differenzgleichungen treten. Dabei werden alle Analogien zwischen Differential- und Differenzenrechnung ausgenützt.

Wir stellen uns die Aufgabe, Polynome mit reellen Koeffizienten zu konstruieren, die in n den Grad ν erreichen:

$$y_{\nu n} = a_{\nu 0} + \binom{n}{1} a_{\nu 1} + \binom{n}{2} a_{\nu 2} + \ldots + \binom{n}{\nu} a_{\nu\nu}, \quad (\nu, n = 0, 1, 2, \ldots) \qquad \text{(I)}$$

und die folgenden Orthogonalitätsbedingungen mit der Gewichtsfunktion e^{-n}

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n}\, y_{\nu n}\, y_{\mu n} = \begin{cases} 0 & \text{für } \nu \neq \mu \\ \sigma_\nu > 0 & \text{für } \nu = \mu \end{cases} \qquad \text{(II)}$$

erfüllen.

Mit diesen Polynomen werden wir das normierte orthogonale System von Zeilenvektoren einer unendlichen orthogonalen Matrix bilden, indem wir

$$r_{\nu n} = e^{-\frac{n}{2}} \frac{y_{\nu n}}{\sqrt{\sigma_\nu}} \tag{III}$$

setzen. Die $r_{\nu n}$ sind dann die Elemente einer unendlichen orthogonalen Matrix, die wir eine *Laguerresche Matrix* nennen; im folgenden sollen diese Matrizen noch verallgemeinert werden.

§ 1. Aufstellung der Polynome

1. Ein Hilfssatz von *W. Gröbner* über Orthogonalsysteme. — 2. Bestimmung der Polynome mit einem Variationsprinzip. — 3. Verallgemeinerung der Polynome. — 4. Berechnung einiger Summen der Form $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n} f(n)$. — 5. Normierung der Polynome.

1. Ein **Hilfssatz** von *W. Gröbner* [6], den wir auf (II) anwenden können, indem wir $f_{\nu n} = e^{-\frac{n}{2}} y_{\nu n}$ setzen, besagt:

Dafür, daß für ein unendliches System von (zulässigen und nicht verschwindenden) Vektoren $\{f_{\nu n}\}$ die Orthogonalitätsbedingungen

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_{\nu n} f_{\mu n} = \begin{cases} 0 & \text{für } \nu \neq \mu \\ \sigma_\nu > 0 & \text{für } \nu = \mu \end{cases} \tag{1}$$

erfüllt sind, ist notwendig und hinreichend, daß die Summe

$$S_\nu = \sum_{n=0}^{\infty} [c_0 f_{0n} + c_1 f_{1n} + \ldots + c_{\nu-1} f_{\nu-1,n} + f_{\nu n}]^2 \tag{2}$$

bei jedem ν ihr Minimum für $c_0 = c_1 = \ldots = c_{\nu-1} = 0$ erreicht[5].

Zum Beweise setzen wir zunächst voraus, daß für die $f_{\nu n}$ die Orthogonalitätsbedingungen (1) erfüllt sind; dann gilt

$$S_\nu = c_0^2 \sigma_0 + c_1^2 \sigma_1 + \ldots + c_{\nu-1}^2 \sigma_{\nu-1} + \sigma_\nu$$

und da alle σ_k positiv sind, ergibt sich das Minimum für S_ν bei $c_0 = c_1 = c_2 = \ldots = c_{\nu-1} = 0$.

Umgekehrt sei die Voraussetzung erfüllt, daß S_ν sein Minimum für $c_0 = c_1 = c_2 = \ldots = c_{\nu-1} = 0$ erreicht, dann muß auch

$$s_\mu = \sum_{n=0}^{\infty} [c_\mu f_{\mu n} + f_{\nu n}]^2 \qquad \mu < \nu$$

sein Minimum für $c_\mu = 0$ erreichen. Nun erreicht aber

$$s_\mu = c_\mu^2 \sum_{n=0}^{\infty} f_{\mu n}^2 + 2 c_\mu \sum_{n=0}^{\infty} f_{\mu n} f_{\nu n} + \sum_{n=0}^{\infty} f_{\nu n}^2$$

[5] Die Koeffizienten c_k sind unabhängig von der Summationsvariablen.

sein Minimum für

$$c_\mu = -\frac{\sum_{n=0}^{\infty} f_{\mu n} f_{\nu n}}{\sum_{n=0}^{\infty} f_{\mu n}^2},$$

das heißt, es muß

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_{\mu n} f_{\nu n} = 0 \qquad \text{für} \qquad \mu < \nu$$

sein; da dies für jedes ν gilt, folgen daraus die Orthogonalitätsrelationen (1).

2. Unter den Differenzen der Polynome (I) verstehen wir

$$\begin{aligned} \Delta^0 y_{\nu n} &= y_{\nu n}, \\ \Delta^1 y_{\nu n} &= y_{\nu, n+1} - y_{\nu n} \\ \Delta^2 y_{\nu n} &= y_{\nu, n+2} - 2\, y_{\nu, n+1} + y_{\nu n} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned} \tag{3}$$

$$\Delta^k y_{\nu n} = \Delta^1(\Delta^{k-1} y_{\nu n}) = y_{\nu, n+k} - \binom{k}{1} y_{\nu, n+k-1} + \cdots + (-1)^k y_{\nu n};$$

die ν-te Differenz ist dann

$$\Delta^\nu y_{\nu n} = a_{\nu\nu} \neq 0. \tag{4}$$

Den oben bewiesenen Hilfssatz können wir dazu verwenden, die Orthogonalitätsbedingungen (II) durch ein Variationsproblem zu ersetzen. Denn die Forderung:

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n} y_{\nu n}^2 = \text{Min!} \qquad \nu = 0, 1, 2, \ldots$$

unter der Nebenbedingung, daß der ν-te Koeffizient der Polynome (I) festbleibt, entspricht gerade den Orthogonalitätsbedingungen (II). In bekannter Weise fügen wir diese Nebenbedingung mit einem *Lagrange*-Faktor $2\lambda_n$ zur obigen Minimalbedingung und erhalten das Variationsproblem

$$\Omega = \sum_{n=0}^{\infty} [e^{-n} y_{\nu n}^2 + 2\lambda_n(\Delta^\nu y_{\nu n} - a_{\nu\nu})] = \text{Min!} \tag{5}$$

Durch Überlagerung einer Zahlenfolge $\{z_n\}$, die willkürlich gewählt werden kann und nur der Einschränkung unterliegt, nicht stärker als eine Potenz von n zu wachsen, variieren wir

$$\Omega(\varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \{e^{-n}[y_{\nu n} + \varepsilon z_n]^2 + 2\lambda_n[\Delta^\nu(y_{\nu n} + \varepsilon z_n) - a_{\nu\nu}]\} = \text{Min!} \tag{5'}$$

$\Omega(\varepsilon)$ ist eine Funktion von ε, die für $\varepsilon = 0$ ein Minimum hat, daher muß

$$\delta\,\Omega = \left(\frac{\partial\Omega\,(\varepsilon)}{\partial\,\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0} = 2\sum_{n=0}^{\infty}[e^{-n}\,y_{\nu n}\,z_n + \lambda_n\,\Delta^{\nu}\,z_n] = 0,\quad \nu = 0,1,2,\ldots \qquad (6)$$

sein[6].

Die Bedingung (6) muß für jede beliebige Folge $\{z_n\}$ erfüllt sein, daher versuchen wir eine Umformung, mit der eine Ausklammerung dieser willkürlichen z_n gelingt. Zu diesem Zweck wenden wir auf den zweiten Teil der Summe in (6) die partielle Summation an, die dem Sinne nach der partiellen Integration entspricht:
Aus

$$\Delta(u_n\,v_n) = u_n\,\Delta\,v_n + v_{n+1}\,\Delta\,u_n$$

und

$$\sum_{n=a}^{b}\Delta(u_n\,v_n) = [u_n\,v_n]_{n=a}^{n=b+1}, \qquad (a,\ b \text{ ganz})$$

folgt die Formel für die partielle Summation

$$\sum_{n=a}^{b} u_n\,\Delta\,v_n = [u_n\,v_n]_{n=a}^{n=b+1} - \sum_{n=a}^{b} v_{n+1}\,\Delta\,u_n. \qquad (7)$$

Durch wiederholte Anwendung dieser Formel (7) auf das zweite Glied in (6) erhalten wir

$$\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_n\,\Delta^{\nu}\,z_n = [\lambda_n\,\Delta^{\nu-1}\,z_n - \Delta\,\lambda_n\,\Delta^{\nu-2}\,z_{n+1} + \ldots +$$

$$+ (-1)^{\nu-1}\,\Delta^{\nu-1}\,\lambda_n\,z_{n+\nu-1}]_{n=0}^{n=\infty} + (-1)^{\nu}\sum_{n=0}^{\infty}\Delta^{\nu}\,\lambda_n\,z_{n+\nu}.$$

Dadurch entsteht für die Variation (6)

$$\frac{1}{2}\,\delta\,\Omega = \sum_{n=0}^{\infty}\{e^{-n}\,y_{\nu n} + (-1)^{\nu}\,\Delta^{\nu}\,\lambda_{n-\nu}\}\,z_n + (-1)^{\nu-1}\sum_{n=0}^{\nu-1}\Delta^{\nu}\,\lambda_{n-\nu}\,z_n +$$

$$+ [\lambda_n\,\Delta^{\nu-1}\,z_n - \Delta\,\lambda_n\,\Delta^{\nu-2}\,z_{n+1} + \ldots + (-1)^{\nu-1}\,\Delta^{\nu-1}\,\lambda_n\cdot z_{n+\nu-1}]_{n=0}^{n=\infty} \qquad (8)$$

Die Variation $\delta\,\Omega$ muß bei jeder Wahl der Folge $\{z_n\}$ verschwinden; wählt man insbesondere nur das eine Glied $z_k = 1$ $(k \geqq \nu)$, alle übrigen Glieder aber gleich null, so folgt aus (8), wenn wir wieder n statt k schreiben

---

[6] Die Folge λ_n der *Lagrange* Faktoren muß so beschaffen sein, daß die Summen in (5), (5′) und (6) absolut konvergieren. Tatsächlich zeigt sich bei der Bestimmung der λ_n (9′), daß diese den Faktor e^{-n} enthalten, während die $y_{\nu n}$ und die z_n nicht stärker als eine Potenz von n wachsen, also die verlangte Bedingung erfüllt ist.

$$e^{-n} y_{\nu n} + (-1)^{\nu} \Delta^{\nu} \lambda_{n-\nu} = 0 \qquad \text{für } n \geqq \nu$$

und daher

$$y_{\nu n} = (-1)^{\nu-1} e^{n} \Delta^{\nu} \lambda_{n-\nu} \qquad \text{für } n \geqq \nu. \tag{9}$$

Nun ist aber nach Voraussetzung $y_{\nu n}$ ein Polynom des Grades ν in n; daraus folgt, wie sich aus einer leichten Überlegung ergibt, daß auch der *Lagrange*-Faktor $\lambda_{n-\nu}$ bis auf einen Faktor e^{-n} selbst ein Polynom $p_{\nu n}$ des Grades ν in n sein muß:

$$\lambda_{n-\nu} = (-1)^{\nu-1} e^{-n} p_{\nu n} \qquad \text{für } n \geqq \nu. \tag{9'}$$

Lassen wir die Gleichungen (9), (9') auch für $n = 0, 1, 2, \ldots, \nu - 1$ gelten, so wird dadurch der *Lagrange*-Faktor λ_n für negative Indizes festgelegt. Diese Festlegung ist möglich, denn im Variationsprinzip (5) kommen die λ_n mit negativem Index nicht vor und sind daher noch vollkommen frei wählbar.

Bei dieser Wahl von λ_n verschwindet der Ausdruck in der eckigen Klammer von (8) an der oberen Grenze unter der Voraussetzung, daß die Zahlenfolge $\{z_n\}$ für $n \to \infty$ nicht stärker als eine Potenz von n wächst; dieser Voraussetzung wurde aber bereits bei der Definition der Zahlenfolge $\{z_n\}$ Rechnung getragen. Außerdem ist der Ausdruck in der geschlungenen Klammer von (8) null, denn (9) gilt nach neuer Voraussetzung für alle n. Schließlich bleibt von Gleichung (8) nur

$$\frac{1}{2}\delta\Omega = (-1)^{\nu-1} \sum_{n=0}^{\nu-1} \Delta^{\nu} \lambda_{n-\nu} z_n - \\ - \lambda_0 \Delta^{\nu-1} z_0 + \Delta \lambda_0 \Delta^{\nu-2} z_1 - \ldots + (-1)^{\nu} \Delta^{\nu-1} \lambda_0 z_{\nu-1} = 0$$

übrig. Entsprechend den Gleichungen (3) lösen wir die Differenzen von z auf

$$\frac{1}{2}\delta\Omega = \sum_{k=1}^{\nu} z_{\nu-k} (-1)^{k} \left[\binom{\nu-1}{k-1} \lambda_0 - \binom{\nu-2}{k-1} \Delta \lambda_0 + \ldots + \right. \\ \left. + (-1)^{\nu+k} \binom{k-1}{k-1} \Delta^{\nu-k} \lambda_0 + (-1)^{\nu+k+1} \Delta^{\nu} \lambda_{-k}\right].$$

Der letzte Summand hat ausführlich geschrieben die Form

$$\Delta^{\nu} \lambda_{-k} = \lambda_{\nu-k} - \binom{\nu}{1} \lambda_{\nu-k-1} + \ldots + (-1)^{\nu-k} \binom{\nu}{\nu-k} \lambda_0 + - \ldots + (-1)^{\nu} \lambda_{-k},$$

so daß wir nach analoger Auflösung der Differenzen von λ

$$\frac{1}{2}\delta\Omega = \sum_{k=1}^{\nu} (-1)^{k} z_{\nu-k} \left\{ \sum_{j=0}^{\nu-k} (-1)^{j} \lambda_j \left[\binom{\nu-j-1}{k-1} + \binom{j+1}{1} \binom{\nu-j-2}{k-1} + \right. \right. \\ \left. \left. + \ldots + \binom{\nu-k}{\nu-k-j} \binom{k-1}{k-1} - \binom{\nu}{k+j}\right] + \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^{j} \lambda_{-j-1} \binom{\nu}{k-j-1}\right\}$$

erhalten. In diesem Ausdruck ergeben sich alle Koeffizienten von λ_j als null, denn es gilt[7]

$$\binom{\nu-j-1}{k-1} + \binom{j+1}{1}\binom{\nu-j-2}{k-1} + \ldots + \binom{\nu-k}{\nu-k-j}\binom{k-1}{k-1} = \binom{\nu}{j+k}. \tag{10}$$

Letzten Endes bleibt noch

$$\frac{1}{2}\delta\Omega = -z_{\nu-1}[\lambda_{-1}] + z_{\nu-2}[\binom{\nu}{1}\lambda_{-1} - \lambda_{-2}] + \ldots +$$
$$+ (-1)^{\nu} z_0 [\binom{\nu}{\nu-1}\lambda_{-1} - \binom{\nu}{\nu-2}\lambda_{-2} + \ldots + (-1)^{\nu-1}\lambda_{-\nu}].$$

Dieser Ausdruck muß ebenfalls für jede Wahl von $\{z_n\}$ verschwinden. Setzen wir $z_{\nu-1} = 1$ und alle anderen darin vorkommenden z_n null, so folgt $\lambda_{-1} = 0$. Setzen wir $z_{\nu-2} = 1$ und alle anderen z_n null, so muß auch $\lambda_{-2} = 0$ sein, denn λ_{-1} hat sich bereits als null ergeben. So findet man sukzessive die Bedingung, daß alle λ_{-j-1} ($j=0, 1, 2, \ldots$) null sein müssen. Das in $\lambda_{n-\nu}$ enthaltene Polynom $p_{\nu n}$ (9′) kann also, abgesehen von einem konstanten Normierungsfaktor, nur die Form $\binom{n}{\nu}$ haben; die endgültigen Formeln lauten daher:

$$\lambda_{n-\nu} = (-1)^{\nu-1} e^{-n}\binom{n}{\nu},\ y_{\nu n} = e^n \Delta^{\nu}[e^{-n}\binom{n}{\nu}],\quad n, \nu = 0, 1, 2, \ldots. \tag{11}$$

3. In die Orthogonalitätsbedingungen (II) führen wir ähnlich wie bei den *Laguerreschen* Polynomen ([4], S. 280) eine allgemeinere Gewichtsfunktion ein

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n}\binom{n+\alpha}{n} y_{\nu n}^{(\alpha)} y_{\mu n}^{(\alpha)} = \begin{cases} 0 & \text{für } \nu \neq \mu \\ \tau_\nu > 0 & \text{für } \nu = \mu, \end{cases} \tag{12}$$

mit irgendeiner nicht negativen reellen Zahl α[8]. Alle vorausgehenden Überlegungen bleiben gültig und es folgt

$$y_{\nu n}^{(\alpha)} = \frac{e^n}{\binom{n+\alpha}{n}} \Delta^{\nu}[e^{-n}\binom{n+\alpha}{n-\nu}],\qquad \nu, n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{13}$$

---

[7] Entwickelt man

$$(1-x)^{-m-1}(1-x)^{-j-1} = (1-x)^{-j-m-2}$$

in eine Binominalreihe und vergleicht auf beiden Seiten die Koeffizienten, so erhält man die Formel

$$\sum_{s=0}^{p-m}\binom{p-s}{m}\binom{j+s}{j} = \binom{p+j+1}{p-m},$$

aus der man (10) folgern kann. Vgl. [7], S. 251.

[8] Noch allgemeiner kann $e^{-\beta n}$ mit $\beta > 0$ gesetzt werden. Dann wäre in allen folgenden Betrachtungen statt e einfach e^{β} zu setzen.

Entwickeln wir die Differenz nach (3), so erhalten wir

$$y_{\nu n}^{(\alpha)} = \frac{e^n}{\binom{n+\alpha}{n}} \left[e^{-(n+\nu)} \binom{n+\alpha+\nu}{n} - e^{-(n+\nu-1)} \binom{\nu}{1} \binom{n+\alpha+\nu-1}{n-1} + \dots + \right.$$

$$\left. + (-1)^\nu e^{-n} \binom{n+\alpha}{n-\nu}\right] = \frac{(-1)^\nu}{\binom{n+\alpha}{n}} \sum_{k=0}^{\nu} (-1)^k e^{-k} \binom{\nu}{k} \binom{n+\alpha+k}{n-\nu+k}. \quad (14)$$

Außerdem können wir durch einfache Umformungen noch zwei weitere Entwicklungen von (13) angeben. Verwendet man die Beziehung

$$\binom{n+\alpha}{n-\nu} = \binom{n+\alpha+\nu}{n} - \binom{\nu}{1} \binom{n+\alpha+\nu-1}{n} + \dots + (-1)^\nu \binom{n+\alpha}{n},$$

so findet man

$$y_{\nu n}^{(\alpha)} = \frac{1}{\binom{n+\alpha}{n}} \left[\left(\frac{1}{e} - 1\right)^\nu \binom{n+\alpha+\nu}{n} + \left(\frac{1}{e} - 1\right)^{\nu-1} \binom{\nu}{1} \binom{n+\alpha+\nu-1}{n} + \dots + \right.$$

$$\left. + \binom{n+\alpha}{n}\right] = \frac{1}{\binom{n+\alpha}{n}} \sum_{k=0}^{\nu} \left(\frac{1}{e} - 1\right)^k \binom{\nu}{k} \binom{n+\alpha+k}{n} \quad (15)$$

und die Beziehung

$$\binom{n+\alpha+\nu}{n} = \binom{n+\alpha}{n-\nu} + \binom{\nu}{1} \binom{n+\alpha}{n-\nu+1} + \dots + \binom{n+\alpha}{n}$$

anwendend erhält man

$$y_{\nu n}^{(\alpha)} = \frac{1}{\binom{n+\alpha}{n}} \left[\left(\frac{1}{e} - 1\right)^\nu \binom{n+\alpha}{n-\nu} + \left(\frac{1}{e} - 1\right)^{\nu-1} \frac{1}{e} \binom{\nu}{1} \binom{n+\alpha}{n-\nu+1} + \dots + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{e^\nu} \binom{n+\alpha}{n}\right] = \frac{1}{\binom{n+\alpha}{n}} \sum_{k=0}^{\nu} \left(\frac{1}{e} - 1\right)^{\nu-k} \frac{1}{e^k} \binom{\nu}{k} \binom{n+\alpha}{n-\nu+k}. \quad (16)$$

In übersichtlicher Darstellung sollen hier die ersten Polynome für den Fall $\alpha = 0$ angeschrieben werden:

$$y_{0n} = 1,$$

$$y_{1n} = \frac{1}{e} + n \cdot \left(\frac{1}{e} - 1\right),$$

$$y_{2n} = \frac{1}{e^2} + n \cdot \left(\frac{3}{2e^2} - \frac{1}{e} - \frac{1}{2}\right) + n^2 \left(\frac{1}{2e^2} - \frac{1}{e} + \frac{1}{2}\right),$$

$$y_{3n} = \frac{1}{e^3} + n \cdot \left(\frac{11}{6e^3} - \frac{1}{e^2} - \frac{1}{2e} - \frac{1}{3}\right) + n^2 \left(\frac{1}{e^3} - \frac{3}{2e^2} + \frac{1}{2}\right) + n^3 \left(\frac{1}{6e^3} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2e^2} + \frac{1}{2e} - \frac{1}{6}\right),$$

$$y_{4n} = \frac{1}{e^4} + n \cdot \left(\frac{25}{12\,e^4} - \frac{1}{e^3} - \frac{1}{2\,e^2} - \frac{1}{3\,e} - \frac{1}{4}\right) + n^2 \left(\frac{35}{24\,e^4} - \frac{11}{6\,e^3} - \frac{1}{4\,e^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{6\,e} + \frac{11}{24}\right) + n^3 \left(\frac{5}{12\,e^4} - \frac{1}{e^3} + \frac{1}{2\,e^2} + \frac{1}{3\,e} - \frac{1}{4}\right) + n^4 \left(\frac{1}{24\,e^4} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{6\,e^3} + \frac{1}{4\,e^2} - \frac{1}{6\,e} + \frac{1}{24}\right),$$

. . . . . .

4. Im Punkt 5 dieses Paragraphen werden wir die Orthogonalität der Polynome (13) nochmals nachweisen und die Normierung vornehmen. Zu diesem Zweck benötigen wir die Summen

$$S_k = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n} \binom{n}{k}, \quad T_k = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n} \binom{n+k}{k} \text{ für } k = 0, 1, 2, \ldots,$$

die wir mit der partiellen Summation (7) einfach berechnen können.

Zunächst gilt

$$S_0 = T_0 = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n} = \frac{e}{e-1}$$

und für alle folgenden findet man die Rekursionsformel:

$$S_k = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n} \binom{n}{k} = \frac{e}{e-1} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{k} \Delta\, e^{-n} = \frac{e}{e-1} \left\{ \left[\binom{n}{k} e^{-n} \right]_0^{\infty} - \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(n+1)}\, \Delta \binom{n}{k} \right\}$$

bzw. vereinfacht

$$S_k = \frac{1}{e-1} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{k-1} e^{-n} = \frac{1}{e-1}\, S_{k-1}, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Daraus ergibt sich nun die allgemeine Formel:

$$S_k = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{k} e^{-n} = \frac{e}{(e-1)^{k+1}}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots. \tag{17}$$

Entsprechend verfahren wir mit den Summen T_k:

$$T_k = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n} \binom{n+k}{k} = \frac{e}{e-1} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} \Delta\, e^{-n} =$$

$$= \frac{e}{e-1} \left\{ \left[\binom{n+k}{k} e^{-n} \right]_0^{\infty} - \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(n+1)}\, \Delta \binom{n+k}{k} \right\} = \frac{e}{e-1} \left[-1 - \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(n+1)} \binom{n+k}{k-1} \right] =$$

$$= \frac{e}{e-1} \left[-1 + 1 - \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n} \binom{n+k-1}{k-1} \right] = \frac{e}{e-1}\, T_{k-1}, \qquad k = 1, 2, \ldots;$$

aus dieser Rekursionsformel entsteht allgemein

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n} \binom{n+k}{k} = \frac{e}{(e-1)^{k+1}}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots. \tag{18}$$

5. Wir überprüfen nun auch noch direkt die Orthogonalität der Polynome (13) und verwenden die dazu nötigen Entwicklungen zur Normierung der Polynome.

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit nehmen wir im folgenden $\nu > \mu$ an. Indem wir die partielle Summation (7) wieder sukzessive auf die Orthogonalitätsbedingungen (12) anwenden, erhalten wir

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n} \binom{n+\alpha}{n} y_{\nu n}^{(\alpha)} y_{\mu n}^{(\alpha)} = \sum_{n=0}^{\infty} \Delta^{\nu} \left[e^{-n} \binom{n+\alpha}{n-\nu}\right] y_{\mu n}^{(\alpha)} =$$

$$= \left\{\Delta^{\nu-1} \left[e^{-n} \binom{n+\alpha}{n-\nu}\right] y_{\mu n}^{(\alpha)} - \Delta^{\nu-2} \left[e^{-(n+1)} \binom{n+\alpha+1}{n-\nu+1}\right] \Delta\, y_{\mu n}^{(\alpha)} + - \ldots +\right.$$

$$\left. + (-1)^{\nu-1} e^{-(n+\nu-1)} \binom{n+\alpha+\nu-1}{n-1} \Delta^{\nu-1} y_{\mu n}^{(\alpha)} \right\}_0^{\infty} + (-1)^{\nu} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(n+\nu)} \binom{n+\alpha+\nu}{n} \Delta^{\nu} y_{\mu n}^{(\alpha)}. \tag{19}$$

Die in der geschlungenen Klammer auftretenden fallenden Differenzen können als Summen dargestellt werden

$$\Delta^{\nu-j-1} \left[e^{-(n+j)} \binom{n+\alpha+j}{n-\nu+j}\right] = e^{-(n+j)} \sum_{k=0}^{\nu-j-1} \left(\frac{1}{e} - 1\right)^k \binom{n+\alpha+j+k}{n-1} \binom{\nu-j-1}{k},$$

$$j = 0, 1, 2, \ldots \nu - 1,$$

die sowohl für $n = 0$ als auch für $n = \infty$ verschwinden. Außerdem sind alle $\Delta^{\nu} y_{\mu n}^{(\alpha)}$ wegen $\nu > \mu$ null, es verschwindet also auch die letzte Summe und die Orthogonalität (12) ist für $\nu > \mu$ bewiesen. Nehmen wir von vornherein $\nu < \mu$ an und stellen $y_{\mu n}^{(\alpha)}$ als Differenz dar, dann folgt ebenso die Orthogonalität für $\nu < \mu$.

Zur Normierung berechnen wir die ν-te Differenz $\Delta^{\nu} y_{\nu n}^{(\alpha)}$, indem wir für $y_{\nu n}^{(\alpha)}$ die Darstellung (15) verwenden. Dann enthält nur ein Glied n im Grad ν und liefert daher allein einen Beitrag zur ν-ten Differenz:

$$\Delta^{\nu} y_{\nu n}^{(\alpha)} = \Delta^{\nu} \left[\frac{1}{\binom{n+\alpha}{n}} \sum_{k=0}^{\nu} \left(\frac{1}{e} - 1\right)^k \binom{\nu}{k} \binom{n+\alpha+k}{n}\right] = \Delta^{\nu} \left[\frac{1}{\binom{n+\alpha}{n}} \left(\frac{1}{e} - 1\right)^{\nu} \binom{n+\alpha+\nu}{n}\right] =$$

$$= \left(\frac{1}{e} - 1\right)^{\nu} \frac{1}{(\alpha+1)\ldots(\alpha+\nu)} \Delta^{\nu} \left[(n+\alpha+\nu) \ldots (n+\alpha+1)\right] =$$

$$= \left(\frac{1}{e} - 1\right)^{\nu} \frac{\nu!}{(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+\nu)}, \qquad \nu = 1, 2, 3, \ldots$$

und nach (3) und (13)

$$\Delta^0 y_{on}^{(\alpha)} = 1.$$

Setzen wir in (19) $\nu = \mu$, so verschwinden ebenfalls alle Glieder in der geschlungenen Klammer. Nur die Summe liefert einen von null verschiedenen Beitrag, den wir unter Anwendung der Formel (18) berechnen können; so erhalten wir

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n} \binom{n+\alpha}{n} [y_{\nu n}^{(\alpha)}]^2 = (-1)^\nu \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(n+\nu)} \binom{n+\alpha+\nu}{n} \Delta^\nu y_{\nu n}^{(\alpha)} =$$

$$= \frac{\nu!\, e^{\alpha+\nu+1} (1/e - 1)^\nu}{(\alpha+1) \dots (\alpha+\nu)\, e^\nu (e-1)^{\alpha+\nu+1}} = \frac{1}{\binom{\alpha+\nu}{\nu} \cdot (e-1)^{\alpha+1} e^{\nu-\alpha-1}} = \tau_\nu;$$

die normierten Polynome $r_{\nu n}^{(\alpha)}$ haben die Gestalt:

$$r_{\nu n}^{(\alpha)} = \frac{e^{-\frac{n}{2}} \sqrt{\binom{n+\alpha}{n}}\, y_{\nu n}^{(\alpha)}}{\sqrt{\tau_\nu}} = e^{-\frac{n}{2}} \sqrt{\binom{n+\alpha}{n} \binom{\alpha+\nu}{\nu} \cdot (e-1)^{\alpha+1} e^{\nu-\alpha-1}}\, y_{\nu n}^{(\alpha)},$$

$$\nu, n = 0, 1, 2, \dots, \alpha > 0. \tag{20}$$

§ 2. Beziehungen zwischen den Polynomen

1. Erzeugendes Polynom. — 2. Rekursionsformel bezüglich ν. — 3. Summenformel von *Christoffel*. — 4. Differenzengleichung für die Polynome. — 5. Summenabschätzung analog der Integralabschätzung von *Kogbetliantz*.

1. In diesem Paragraphen werden ausschließlich die nicht normierten Polynome $y_{\nu n}^{(\alpha)}$ verwendet.

Bilden wir mit einer beliebigen, nicht negativen ganzen Zahl z

$$\varphi_{nz} = \sum_{\nu=0}^{z} (-1)^\nu \binom{z}{\nu} y_{\nu n}^{(\alpha)}$$

und ersetzen $y_{\nu n}^{(\alpha)}$ nach Formel (15), § 1, so erhalten wir durch Summenvertauschung

$$\varphi_{nz} = \sum_{\nu=0}^{z} \frac{(-1)^\nu \binom{z}{\nu}}{\binom{n+\alpha}{n}} \sum_{k=0}^{\nu} \binom{n+\alpha+k}{n} \binom{\nu}{k} \left(\frac{1}{e} - 1\right)^k =$$

$$= \frac{1}{\binom{n+\alpha}{n}} \sum_{k=0}^{z} \binom{n+\alpha+k}{n} \left(\frac{1}{e} - 1\right)^k \sum_{\nu=k}^{z} (-1)^\nu \binom{z}{\nu} \binom{\nu}{k}.$$

Für jedes nicht negative ganzzahlige z und k gilt[9]

$$\sum_{\nu=0}^{z} (-1)^\nu \binom{z}{\nu} \binom{\nu}{k} = \begin{cases} 0 & \text{für } z \neq k \\ (-1)^k & \text{für } z = k \end{cases}$$

[9] Siehe etwa [7], S. 255.

und daher bleibt nur das letzte Glied übrig. Wir erhalten so als **erzeugendes Polynom**

$$\varphi_{nz} = \sum_{\nu=0}^{z} (-1)^\nu \binom{z}{\nu} y_{\nu n}^{(\alpha)} = \frac{\binom{n+\alpha+z}{n}}{\binom{n+\alpha}{n}} \left(1 - \frac{1}{e}\right)^z, \quad z, n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{1}$$

2. Aus diesem erzeugenden Polynom (1) soll eine Rekursionsformel für die $y_{\nu n}^{(\alpha)}$ bezüglich ν hergeleitet werden. Dazu bilden wir von φ_{nz} die Differenz bezüglich z

$$\Delta \varphi_{nz} = \varphi_{n,z+1} - \varphi_{nz},$$

indem wir für φ_{nz} einmal die Summe und einmal das Polynom aus (1) verwenden. So finden wir einerseits

$$\Delta \varphi_{nz} = \sum_{\nu=1}^{z+1} (-1)^\nu \binom{z}{\nu-1} y_{\nu n}^{(\alpha)} \tag{2}$$

und andrerseits

$$\Delta \varphi_{nz} = \varphi_{nz} \cdot \left[\left(1 - \frac{1}{e}\right) \frac{n+\alpha+z+1}{\alpha+z+1} - 1\right],$$

welche Beziehung wir zur folgenden Herleitung besser

$$(\alpha+z+1)\, \Delta \varphi_{nz} = \sum_{\nu=0}^{z} (-1)^\nu \binom{z}{\nu} y_{\nu n}^{(\alpha)} \cdot \left[n\left(1 - \frac{1}{e}\right) - \frac{\alpha}{e} - \frac{1}{e}(z+1)\right] \tag{3}$$

schreiben. Wir setzen nun (2) in (3) ein und formen die Glieder mit dem Faktor $(z+1)$ um

$$(z+1) \sum_{\nu=1}^{z+1} (-1)^\nu \binom{z}{\nu-1} y_{\nu n}^{(\alpha)} = \sum_{\nu=1}^{z+1} (-1)^\nu \nu \left[\binom{z}{\nu} + \binom{z}{\nu-1}\right] y_{\nu n}^{(\alpha)},$$

$$\frac{(z+1)}{e} \sum_{\nu=0}^{z} (-1)^\nu \binom{z}{\nu} y_{\nu n}^{(\alpha)} = \sum_{\nu=0}^{z} (-1)^\nu \frac{(\nu+1)}{e} \left[\binom{z}{\nu+1} + \binom{z}{\nu}\right] y_{\nu n}^{(\alpha)}.$$

Treffen wir außerdem noch die Festlegung $y_{-1,n}^{(\alpha)} = 0$, so erhalten wir

$$\sum_{\nu=0}^{z} (-1)^\nu \binom{z}{\nu} \left\{(\alpha+\nu+1)\, y_{\nu+1,n}^{(\alpha)} - \left[\nu + \frac{\nu+1}{e} + \frac{\alpha}{e} - n\left(1 - \frac{1}{e}\right)\right] y_{\nu n}^{(\alpha)} + \right.$$

$$\left. + \frac{\nu}{e}\, y_{\nu-1,n}^{(\alpha)}\right\} = 0, \qquad z, n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{4}$$

Die Gleichung (4) gilt für alle nicht negativen ganzzahligen z, wir setzen daher sukzessive $z = 0, 1, 2, \ldots$. Damit die Gleichung (4) für $z = 0$ erfüllt ist, muß der Ausdruck in der geschlungenen Klammer mit $\nu = 0$ verschwinden. Damit die Gleichung (4) für $z = 1$ erfüllt ist, muß der Ausdruck in der geschlungenen Klammer mit $\nu = 1$ ver-

schwinden, da der erste Ausdruck mit $\nu=0$ bereits null ist. So weiter schließend sieht man, daß für alle $\nu = 0, 1, 2, \ldots$ die **Rekursionsformel**

$$(\alpha+\nu+1)\, y^{(\alpha)}_{\nu+1,n} - \left[\frac{1}{e}(\alpha+n+\nu+1)+\nu-n\right] y^{(\alpha)}_{\nu n} + \frac{\nu}{e}\, y^{(\alpha)}_{\nu-1,n} = 0 \quad (5)$$

gilt.

3. Wir multiplizieren die Rekursionsformel (5) mit $\dfrac{(\nu+\alpha)!}{\nu!}\, e^{\nu}\, y^{(\alpha)}_{\nu m}$ und erhalten

$$\left[\frac{1}{e}(\alpha+n+\nu+1)+\nu-n\right] \frac{(\nu+\alpha)!}{\nu!}\, e^{\nu}\, y^{(\alpha)}_{\nu n}\, y^{(\alpha)}_{\nu m} = \frac{(\nu+\alpha+1)!}{\nu!}\, e^{\nu}\, y^{(\alpha)}_{\nu+1,n}\, y^{(\alpha)}_{\nu m} + \frac{(\nu+\alpha)!}{(\nu-1)!}\, e^{\nu-1}\, y^{(\alpha)}_{\nu-1,n}\, y_{\nu m}, \qquad \nu, n, m = 0, 1, 2, \ldots.$$

Vertauscht man in dieser Formel n und m und zieht die so entstehende Beziehung von der ursprünglichen ab, so findet man

$$\frac{(\nu+\alpha)!}{\nu!}\, e^{\nu}(m-n)\left(1-\frac{1}{e}\right) y^{(\alpha)}_{\nu n}\, y^{(\alpha)}_{\nu m} = \frac{(\nu+\alpha+1)!}{\nu!}\, e^{\nu}\left[y^{(\alpha)}_{\nu+1,n}\, y^{(\alpha)}_{\nu m} - y^{(\alpha)}_{\nu+1,m}\, y^{(\alpha)}_{\nu n}\right] + \frac{(\nu+\alpha)!}{(\nu-1)!}\, e^{\nu-1}\left[y^{(\alpha)}_{\nu-1,n}\, y^{(\alpha)}_{\nu m} - y^{(\alpha)}_{\nu-1,m}\, y^{(\alpha)}_{\nu n}\right].$$

Summiert man dann diesen Ausdruck über ν, so entfallen rechts vom Gleichheitszeichen alle bis auf das letzte Glied und es bleibt

$$\sum_{k=0}^{\nu} \frac{(k+\alpha)!}{k!}(e-1)\, e^{k-1}\, y^{(\alpha)}_{k,n}\, y^{(\alpha)}_{k,m} = \frac{(\nu+\alpha+1)!\, e^{\nu}}{\nu!(m-n)}\left[y^{(\alpha)}_{\nu+1,n}\, y^{(\alpha)}_{\nu m} - y^{(\alpha)}_{\nu+1,m}\, y^{(\alpha)}_{\nu n}\right] \qquad \nu, n, m = 0, 1, 2, \ldots, \quad (6)$$

eine Beziehung, die der Summendarstellung von *Christoffel* ([4], S. 277) entspricht[10].

4. In diesem 4. Punkt, in dem wir eine Differenzengleichung der Polynome $y^{(\alpha)}_{\nu n}$ herleiten wollen, werden wir unter den Differenzen immer solche bezüglich n verstehen.

Bilden wir unter Verwendung der Darstellung (15), § 1 die Differenz

$$\Delta\, y^{(\alpha)}_{\nu n} = y^{(\alpha)}_{\nu,n+1} - y^{(\alpha)}_{\nu n} = \sum_{k=0}^{\nu} \binom{\nu}{k} \left(\frac{1}{e}-1\right)^k \frac{k}{n+\alpha+1} \frac{\binom{n+\alpha+k}{n}}{\binom{n+\alpha}{n}} = \frac{\nu}{\alpha+1} \sum_{k=0}^{\nu-1} \binom{\nu-1}{k-1} \left(\frac{1}{e}-1\right)^k \frac{\binom{n+\alpha+1+k-1}{n}}{\binom{n+\alpha+1}{n}}, \quad (7)$$

[10] Für nicht ganzzahlige α ist das Fakultätszeichen in üblicher Weise durch die Gammafunktion erklärt: $\alpha! = \Gamma(\alpha+1)$.

so entspricht das der Formel

$$\Delta\, y_{\nu n}^{(\alpha)} = -\frac{\nu}{\alpha+1}\left(1-\frac{1}{e}\right) y_{\nu-1,\,n}^{(\alpha+1)}. \tag{7'}$$

Auf ähnliche Art und Weise können viele weitere Formeln zusammengesetzt werden, wie z. B.

$$\Delta[(\nu-1)\, y_{\nu n}^{(\alpha)} - \nu \cdot y_{\nu-1,\,n}^{(\alpha)}] = \frac{\nu(\nu-1)\,(n+\alpha+2)}{(\alpha+1)\,(\alpha+2)}\left(\frac{1}{e}-1\right)^2 y_{\nu-2,\,n}^{(\alpha+2)}. \tag{8}$$

Wir brauchen aber zur Herleitung einer Differenzengleichung, die der für die Laguerreschen Polynome geltenden Differentialgleichung entspricht, Beziehungen, bei denen sich α nicht ändert. So kann man zusammensetzen

$$y_{\nu n}^{(\alpha)} - y_{\nu-1,\,n}^{(\alpha)} = \sum_{k=0}^{\nu} \binom{\nu-1}{k-1}\left(\frac{1}{e}-1\right)^k \frac{\binom{n+\alpha+k}{n}}{\binom{n+\alpha}{n}} = \frac{1}{\nu}\sum_{k=0}^{\nu}\binom{\nu}{k} k\cdot\left(\frac{1}{e}-1\right)^k \frac{\binom{n+\alpha+k}{n}}{\binom{n+\alpha}{n}}$$

und das ist bis auf den Faktor $\dfrac{n+\alpha+1}{\nu}$ gerade die zweite Summe in (7); also gilt

$$(n+\alpha+1)\,\Delta\, y_{\nu n}^{(\alpha)} = \nu\,[y_{\nu n}^{(\alpha)} - y_{\nu-1,\,n}^{(\alpha)}]. \tag{9}$$

Eine weitere Beziehung dieser Art können wir mit Hilfe der Rekursionsformel (5) finden. Neben (9) gilt für $\nu+1$

$$(n+\alpha+1)\,\Delta\, y_{\nu+1,\,n}^{(\alpha)} = (\nu+1)\,[y_{\nu+1,\,n}^{(\alpha)} - y_{\nu n}^{(\alpha)}]. \tag{9'}$$

Aus (9) und (9') berechnen wir

$$y_{\nu+1,\,n}^{(\alpha)} = y_{\nu n}^{(\alpha)} + \frac{n+\alpha+1}{\nu+1}\,\Delta\, y_{\nu+1,\,n}^{(\alpha)},$$

$$\nu \cdot y_{\nu-1,\,n}^{(\alpha)} = \nu \cdot y_{\nu n}^{(\alpha)} - (n+\alpha+1)\,\Delta\, y_{\nu n}^{(\alpha)}$$

und setzen diese Ausdrücke in die Rekursionsformel (5) ein, so entsteht neben (9) als zweite Beziehung

$$\nu\,.\,\Delta\, y_{\nu-1,\,n}^{(\alpha)} - e(\alpha+\nu)\,\Delta\, y_{\nu n}^{(\alpha)} = \nu(e-1)\, y_{\nu-1,\,n}^{(\alpha)}. \tag{10}$$

Zuletzt muß der in den beiden Formeln (9) und (10) noch auftretende Index $\nu-1$ beseitigt werden. Zu diesem Zweck bilden wir aus (9) durch nochmalige Differenzenbildung

$$(n+\alpha+2)\,\Delta^2\, y_{\nu n}^{(\alpha)} - (\nu-1)\,\Delta\, y_{\nu n}^{(\alpha)} + \nu\,.\,\Delta\, y_{\nu-1,\,n}^{(\alpha)} = 0 \tag{11}$$

und schließlich durch Elimination von $y_{\nu-1,\,n}^{(\alpha)}$ aus (9) und (10)

$$\nu\,\Delta\, y_{\nu-1,\,n}^{(\alpha)} = \nu\,.\,(e-1)\, y_{\nu n}^{(\alpha)} + [e(\nu-n-1)+n+\alpha+1]\,\Delta\, y_{\nu n}^{(\alpha)}. \tag{12}$$

Aus (11) und (12) können wir wieder $\nu . \Delta\, y^{(\alpha)}_{\nu-1,n}$ eliminieren und erhalten dann

$$(n+\alpha+2)\,\Delta^2 y^{(\alpha)}_{\nu n} + [(n+\alpha+2) + \nu(e-1) - e(\nu+1)]\,\Delta\, y^{(\alpha)}_{\nu n} + \\ + \nu(e-1)\, y^{(\alpha)}_{\nu n} = 0, \qquad n, \nu = 0, 1, 2, \ldots \tag{13}$$

als **Differenzengleichung** der Polynome $y^{(\alpha)}_{\nu n}$.

5. In diesem letzten Punkt werden wir eine Beziehung zwischen den Polynomen $y^{(\alpha)}_{\nu n}$ und $y^{(\beta)}_{\nu n}$ beweisen, die der Integralformel von *Kogbetliantz* bei den Laguerreschen Polynomen ([4], S. 278) analog ist und bei der Abschätzung der Polynome $y^{(\alpha)}_{\nu n}$ Verwendung finden wird.

Wir behaupten, daß für $\alpha > \beta$ ($\beta \geqq 0$) die Beziehung

$$y^{(\alpha)}_{\nu n} = \frac{1}{\binom{n+\alpha}{n}} \sum_{k=0}^{n} \binom{n-k+\alpha-\beta-1}{n-k} \binom{k+\beta}{k}\, y^{(\beta)}_{\nu k} \tag{14}$$

gilt. Zum Beweise schreiben wir $y^{(\beta)}_{\nu k}$ ausführlich unter Verwendung der Darstellung (15), § 1 und vertauschen die endlichen Summen

$$\frac{1}{\binom{n+\alpha}{n}} \sum_{k=0}^{n} \binom{n-k+\alpha-\beta-1}{n-k} \sum_{i=0}^{\nu} \binom{\nu}{i} \left(\frac{1}{e} - 1\right)^i \binom{k+\beta+i}{k} = \\ = \frac{1}{\binom{n+\alpha}{n}} \sum_{i=0}^{\nu} \binom{\nu}{i} \left(\frac{1}{e} - 1\right)^i \sum_{k=0}^{n} \binom{n-k+\alpha-\beta-1}{n-k} \binom{k+\beta+i}{k}.$$

Nun ist aber[11]

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n-k+\alpha-\beta-1}{n-k} \binom{k+\beta+i}{k} = \binom{n+\alpha+i}{n}$$

und in der vorhergehenden Gleichung steht rechts gerade die Darstellung (15), § 1 für $y^{(\alpha)}_{\nu n}$.

§ 3. Vollständigkeit und Abschätzung der Polynome

1. Orthogonalität der Spaltenvektoren. — 2. Abschätzungen.

1. Nach den Ausführungen des § 1 sind für die aus den normierten Polynomen (20), § 1 gebildeten Zeilenvektoren die Orthogonalitätsbedingungen

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^{(\alpha)}_{\nu n}\, r^{(\alpha)}_{\mu n} = \begin{cases} 0 & \text{für } \nu \neq \mu \\ 1 & \text{für } \nu = \mu \end{cases} \tag{1}$$

erfüllt.

Wir zeigen nun, daß diese Orthogonalitätsbedingungen auch für die Spaltenvektoren (aus den normierten Polynomen)

---

[11] Kann ebenfalls aus der Formel in Anmerkung 7 gefolgert werden.

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} r_{\nu n}^{(\alpha)}\, r_{\nu m}^{(\alpha)} = \begin{cases} 0 & \text{für } n \neq m \\ 1 & \text{für } n = m \end{cases} \tag{2}$$

erfüllt sind. Dann gilt nach den Entwicklungen in I der

Satz 9: *Die mit den Elementen $r_{\nu n}^{(\alpha)}$ gebildete unendliche Matrix ist im Sinne der Definition* 1 *aus* I *für jedes $\alpha > 0$ eine unendliche orthogonale Matrix; das System der Zeilen- und Spaltenvektoren ist dann nach Satz* 1 *und* 6 *abgeschlossen und vollständig.*

Beweis: Zur Unterscheidung der Differenzen bezüglich n und ν schreiben wir unter das Differenzenzeichen die Größe, auf die sich die Differenzenbildung bezieht. Wir stellen zunächst $y_{\nu n}^{(\alpha)}$ als Differenz bezüglich ν dar

$$\begin{aligned} y_{\nu n}^{(\alpha)} &= \frac{e^n}{\binom{n+\alpha}{n}} \underset{(n)}{\Delta^{\nu}} \left[e^{-n} \binom{n+\alpha}{n-\nu}\right] = \\ &= \frac{1}{\binom{n+\alpha}{n}} \left[e^{-\nu} \binom{n+\alpha+\nu}{n} - e^{-\nu+1} \binom{\nu}{1} \binom{n+\alpha+\nu-1}{n-1} + \ldots + (-1)^{\nu} \binom{n+\alpha}{n-\nu}\right] = \\ &= \frac{1}{\binom{\nu+\alpha}{\nu}} \left[e^{-\nu} \binom{n+\alpha+\nu}{\nu} - e^{-\nu+1} \binom{n}{1} \binom{n+\alpha+\nu-1}{\nu-1} + \ldots + (-1)^n \binom{\alpha+\nu}{\nu-n} e^{n-\nu}\right] = \\ &= \frac{e^n}{\binom{\nu+\alpha}{\nu}} \underset{(\nu)}{\Delta^{n}} \left[e^{-\nu} \binom{\nu+\alpha}{\nu-n}\right]. \end{aligned} \tag{3}$$

Gehen wir analog dem Punkt 3, § 1, vor, so können wir aus dieser Differenz bezüglich ν drei weitere Summendarstellungen für $y_{\nu n}^{(\alpha)}$ bilden

$$y_{\nu n}^{(\alpha)} = \frac{e^{n-\nu}(-1)^n}{\binom{\nu+\alpha}{\nu}} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k e^{-k} \binom{n}{k} \binom{\nu+\alpha+k}{\nu+k-n}, \tag{4}$$

$$y_{\nu n}^{(\alpha)} = \frac{e^{n-\nu}}{\binom{\nu+\alpha}{\nu}} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{e} - 1\right)^k \binom{n}{k} \binom{\alpha+\nu+k}{\nu}, \tag{5}$$

$$y_{\nu n}^{(\alpha)} = \frac{e^{n-\nu}}{\binom{\nu+\alpha}{\nu}} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{e} - 1\right)^{n-k} e^{-k} \binom{n}{k} \binom{\alpha+\nu}{\nu+k-n}, \tag{6}$$

die (14), (15) und (16) in § 1 entsprechen.

Zum Beweise der Orthogonalität der Spaltenvektoren nehmen wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit $m < n$ an und führen in die Orthogonalitätsbedingungen (2) die Differenzendarstellung (3) ein

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} r_{\nu n}^{(\alpha)}\, r_{\nu m}^{(\alpha)} = \underbrace{e^{\frac{n-m}{2}} \sqrt{\binom{n+\alpha}{n}\binom{m+\alpha}{m}} \left(\frac{e-1}{e}\right)^{\alpha+1}}_{M} \sum_{\nu=0}^{\infty} e^{\nu}\, y_{\nu m}^{(\alpha)} \underset{(\nu)}{\Delta^{n}} \left[e^{-\nu} \binom{\nu+\alpha}{\nu-n}\right].$$

Auf diese Differenz wenden wir wieder sukzessive die partielle Summation (7), § 1 an und erhalten

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} r_{\nu n}^{(\alpha)} r_{\nu m}^{(\alpha)} = M\{e^{\nu} y_{\nu m}^{(\alpha)} \underset{(\nu)}{\Delta^{n-1}} [e^{-\nu} \binom{\nu+\alpha}{\nu-n}] - \underset{(\nu)}{\Delta} [e^{\nu} y_{\nu m}^{(\alpha)}] \underset{(\nu)}{\Delta^{n-2}} [e^{-(\nu+1}\binom{\nu+\alpha+1}{\nu-n+1})]$$
$$+ - \ldots + (-1)^{n-1} e^{-(\nu+n-1)} \binom{\nu+\alpha+n-1}{\nu-1} \underset{(\nu)}{\Delta^{n-1}} [e^{\nu} y_{\nu m}^{(\alpha)}]\}_{\nu=0}^{\nu=\infty} +$$
$$+ M.(-1)^n \sum_{\nu=0}^{\infty} e^{-(\nu+n)} \binom{\nu+\alpha+n}{\nu} \underset{(\nu)}{\Delta^n} [e^{\nu} y_{\nu m}^{(\alpha)}]. \qquad (7)$$

Die in der geschlungenen Klammer auftretenden fallenden Differenzen können mit Hilfe der Beziehung (5) als Summen dargestellt werden

$$\underset{(\nu)}{\Delta^{n-j-1}} [e^{-(\nu+j)} \binom{\nu+j+\alpha}{\nu+j-n}] = e^{-(\nu+j)} \sum_{k=0}^{n-j-1} (\frac{1}{e} - 1)^k \binom{\alpha+\nu+k+j}{\nu-1} \binom{\nu-j-1}{k},$$
$$j = 0, 1, 2, \ldots, n-1,$$

die sowohl für $\nu = 0$ als auch für $\nu = \infty$ verschwinden. Außerdem verschwinden alle n-ten Differenzen in der Summe von (7), denn nach Voraussetzung gilt $m < n$. Ebenso kann man für $n < m$ schließen und die Orthogonalität der Spaltenvektoren ist bewiesen.

Zum Beweise, daß es sich um ein *normiertes* Orthogonalsystem handelt, setzen wir in (7) $n=m$. Es verschwinden ebenso alle Ausdrücke in der geschlungenen Klammer, nur die Summe über die n-ten Differenzen von $y_{\nu n}^{(\alpha)}$ ist von null verschieden. Diese n-ten Differenzen (bezüglich ν) können wir unter Verwendung der Darstellung (4) leicht berechnen

$$\underset{(\nu)}{\Delta^n} [e^{\nu} y_{\nu n}^{(\alpha)}] = \frac{(1-e)^n}{\binom{n+\alpha}{n}};$$

daraus erhalten wir durch Anwendung der Formel (18) aus § 1:

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} e^{-(\nu+n)} \binom{n+\alpha+\nu}{\nu} = (\frac{e}{e-1})^{\alpha+1} \frac{1}{(e-1)^n}$$

und schließlich für jedes n ($n = 0, 1, 2, \ldots$)

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} r_{\nu m}^2 = \binom{n+\alpha}{n} (\frac{e-1}{e})^{\alpha+1} \frac{(e-1)^n}{\binom{n+\alpha}{n}} \sum_{\nu=0}^{\infty} e^{-(\nu+n)} \binom{n+\alpha+\nu}{\nu} = 1.$$

2. **Satz 10:** *Für die Polynome $y_{\nu n}^{(\alpha)}$ gelten die Abschätzungen*

$$|y_{\nu n}^{(\alpha)}| \leqq \frac{e.\alpha\sqrt{e^n-1}}{(e-1)(n+\alpha)\sqrt{e^{\nu}}} \leqq \frac{\sqrt{2e}.\alpha}{(n+\alpha)\sqrt{e-1}} e^{\frac{n-\nu}{2}} \quad \text{für } \alpha > 0, \qquad (8)$$

$$|y_{\nu n}^{(0)}| \leqq \frac{\sqrt{e}}{\sqrt{e-1}}\, e^{\frac{n-\nu}{2}} \qquad \text{für } \alpha = 0, \tag{9}$$

$$\nu, n = 0, 1, 2, \ldots .$$

Beweis: Die in (14), § 2 angegebene Summenformel (*Kogbetliantz*) hat für $\beta = 0$ die Form

$$y_{\nu n}^{(\alpha)} = \frac{1}{\binom{n+\alpha}{n}} \sum_{k=0}^{n} \binom{n-k+\alpha-1}{n-k} y_{\nu k}^{(0)}, \qquad \alpha > 0. \tag{10}$$

Beachten wir den Zusammenhang zwischen normierten und nicht normierten Polynomen (20), § 1

$$y_{\nu k}^{(0)} = \frac{e^{\frac{k}{2}}\, r_{\nu k}^{(0)}}{\sqrt{e^{\nu-1}(e-1)}}$$

und die für jedes k ($k = 0, 1, 2, \ldots$) geltende Abschätzung

$$\frac{\binom{n-k+\alpha-1}{n-k}}{\binom{n+\alpha}{n}} = \frac{(n-k+\alpha-1)(n-k+\alpha-2)\ldots\alpha}{(n+\alpha)\ldots(\alpha+1)} \leqq \frac{\alpha}{n+\alpha},$$

dann können wir durch Anwendung der *Schwarzschen Ungleichung* auf (10) abschätzen

$$|y_{\nu n}^{(\alpha)}| = \left|\frac{1}{\binom{n+\alpha}{n}} \sum_{k=0}^{n} \binom{n-k+\alpha-1}{n-k} y_{\nu k}^{(0)}\right| \leqq$$

$$\leqq \frac{\alpha}{(n+\alpha)\sqrt{e^{\nu-1}(e-1)}} \left|\sum_{k=0}^{n} e^{\frac{k}{2}} r_{\nu k}^{(0)}\right| \leqq \frac{\alpha}{(n+\alpha)\sqrt{e^{\nu-1}(e-1)}} \left[\sum_{k=0}^{n} e^{k}\right]^{\frac{1}{2}} \left[\sum_{k=0}^{\infty} r_{\nu k}^{(0)2}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Durch Einsetzen von

$$\sum_{k=0}^{n} e^{k} = \frac{e^{n+1}-e}{e-1} < 2\, e^{n} \tag{11}$$

in diese Abschätzung folgt gerade (8).

Ähnlich folgt (9) aus

$$|y_{\nu n}^{(0)}| = \frac{|r_{\nu n}^{(0)}|\, e^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{e^{\nu-1}(e-1)}} \leqq \frac{e^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{e^{\nu-1}(e-1)}} \left[\sum_{k=0}^{\infty} r_{\nu k}^{(0)2}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Literatur

[1] *W. Gröbner*: Matrizenrechnung, München, Verlag R. Oldenbourg, 1956.
[2] *F. G. Tricomi*: Vorlesungen über Orthogonalreihen, Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1955.

[3] *W. Schmeidler*: Integralgleichungen mit Anwendungen in Physik und Technik, Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1950.

[4] *G. Vitali e G. Sansone*: Moderna teoria delle funzioni di variabile reale, Bologna, Nicola Zanichelli editore, 1946, parte II.

[5] *W. Gröbner*: Sistemi di polinomi ortogonali soddisfacenti a date condizioni, Sem. Mat. Roma, 3 (4), 29—51, 1939.

[6] *W. Gröbner*: Über die Konstruktion von Systemen orthogonaler Polynome in ein- und zweidimensionalen Bereichen. Monatshefte für Mathematik 52, 38—54, 1948.

[7] *E. Netto*: Lehrbuch der Kombinatorik, Leipzig, Verlag Teubner, 1901.

[8] *G. Szegö*: Orthogonal Polynomials, New York, American Mathematical Society. 1939.

Buchbesprechungen

Opere. Band VIII: Classi speciali di superficie; Band IX: Geometria degli spazi di Riemann; Band X: Richerche varie. Von *L. Bianchi*. 398, 263, 78 S. Rom: Edizioni Cremonese. 1958. Band VIII: Lire 3500.—, Band IX und X: Lire 3500.—.

Die vorliegenden Bände VIII bis X der Werke *Bianchis* enthalten differentialgeometrische Arbeiten, und zwar Band VIII über spezielle Flächenklassen, Band IX über Riemannsche Geometrie und Band X über verschiedene Themen, insbesondere über den Parallelismus von *Levi-Civita*. Den einzelnen Bänden sind (wie bei den vorher erschienenen) kurze Inhaltsangaben über die aufgenommenen Publikationen vorangestellt, die von *M. Villa*, *A. Maxia* und *P. Tortorici* verfaßt sind und eine bequeme und rasche Orientierung ermöglichen. Insgesamt umfassen die drei Bände 41 Arbeiten aus den Jahren 1887 bis 1927.

K. Mayrhofer, Wien

Opere. Band II. Von *C. Segre*. A cura dell'Unione Matematica Italiana e col contributo del Consiglio Nazionale delle Richerche. XVIII, 438 S. Rom: Edizioni Cremonese. 1958. Lire 4000.—.

Dieser zweite Band der Werke von *C. Segre* bringt seine durchwegs projektiv gehaltenen Arbeiten über Differentialgeometrie, ferner seine umfangreichen Untersuchungen über die geometrische Repräsentation komplexer Gebilde, darunter die Abhandlung „Projektive Geometrien im Bereiche der dualen Zahlen". Die insgesamt 19 abgedruckten Arbeiten sind aus den Jahren 1886 bis 1924.

K. Mayrhofer, Wien

Enzyklopädie der Elementarmathematik. Band III: Analysis. Redigiert von *P. S. Alexandroff*, *A. I. Markuschewitsch* und *A. J. Chintschin*. (Hochschulbücher für Mathematik: Band 9.) Mit 158 Textabb., IX, 536 S. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften. 1958. DM 30.—.

Für die Lehramtskandidaten ist es wesentlich, die Elementarmathematik vom höheren Standpunkt aus zu übersehen und zu begreifen. Zwischen dem Mathematikunterricht an Mittelschulen und an Hochschulen muß ein inniger Zusammenhang bestehen. Bedauerlicherweise ist manchmal eine Kluft vorhanden, und es ist daher die von Sowjetmathematikern herausgegebene und nun ins Deutsche übersetzte Enzyklopädie der Elementarmathematik von hohem Wert. Band III behandelt Probleme der Analysis, und zwar elementare Funktionen, Grenzwerte, allgemeiner Funktionsbegriff, Reihen, Differential- und Integralrechnung für Funktionen in einer Veränderlichen und eine Einführung in die Funktionentheorie. Wenn auch diese nicht in der Schule gelehrt werden kann, so ist sie doch für die Lehrer notwendig, um die elementaren Funktionen gründlich zu verstehen. Die Darstellung ist sehr breit und leicht verständlich. Das Buch enthält viele Beispiele und zahlreiche methodische Bemerkungen. Stets wird auf die

enge Verbindung der abstrakten logischen Seite mit der numerischen Seite Wert gelegt. Die Artikel stammen von *W. L. Gontscharow* und *I. P. Natanson*.

N. Hofreiter, Wien

Taschenbuch der Mathematik, für Ingenieure und Studenten der Technischen Hochschulen. Von *I. N. Bronstein* und *K. A. Semendjajew*. Mit 427 Textabb., XII, 548 S. Leipzig: B. G. Teubner Verlagsgesellschaft. 1958. DM 22.50.

Vorbild wird wohl die „Hütte", des Ingenieurs Taschenbuch gewesen sein. Das vorliegende Buch beschränkt sich aber auf Mathematik und ist eine Übersetzung der sechsten russischen Auflage. Es bringt Tabellen, graphische Darstellungen, Algebra, Elementargeometrie, Analytische Geometrie und Differentialgeometrie, eine ausführliche Einführung in die reelle Analysis, ferner Differential- und Integralrechnung, gewöhnliche und partielle Differentialgleichungen, Vektoralgebra und Vektoranalysis, und eine kurze Einführung in die Funktionentheorie, die Variationsrechnung und die Wahrscheinlichkeitsrechnung. Inhaltlich stimmt das Werk weitgehend mit der „Hütte" überein, ist aber mehr als doppelt so umfangreich. Dies kommt daher, weil es viel mehr Theorie bringt und viel ausführlicher geschrieben ist. Der Druck ist leider sehr klein. Die Übungsaufgaben könnten meiner Meinung nach in einem Nachschlagewerk wegbleiben. Das Literaturverzeichnis legt bestimmt keinen Wert auf Vollständigkeit. Es sei aber doch erlaubt, auf die Integraltafeln (I, Unbestimmte Integrale; II, Bestimmte Integrale) von *W. Gröbner* und *N. Hofreiter*, herausgegeben im Springer-Verlag, Wien, 2. Auflage 1957 bzw. 1958, ergänzend hinzuweisen. — Zusammenfassend kann gesagt werden: Das Taschenbuch ist den Ingenieuren, Mathematikern und Physikern ein sehr brauchbares und handliches Nachschlagewerk, das bald weite Verbreitung finden wird. *N. Hofreiter*, Wien

Treizième Congrès des Mathématiciens Scandinaves. Tenu à Helsinki 18—23 Août 1957. Mit Textabb., 209 S. Helsinki: Mercators Tryckeri. 1958.

Das Buch enthält die Auszüge von 22 Vorträgen in deutscher, englischer oder französischer Sprache. Die Themen gehören allen Gebieten der Mathematik an. Die Berichte zeugen von dem hohen Stand, den die Mathematik in den skandinavischen Ländern erreicht hat. *N. Hofreiter*, Wien

Combinatory Logic. Band I. Von *H. B. Curry* und *R. Feys*, mit zwei Abschnitten von *W. Craig*. (Studies in Logic and the Foundations of Mathematics.) XVI, 417 S. Amsterdam: North-Holland Publishing Company. 1958. hfl. 42.—.

Den Grundstein zum Gebäude der kombinatorischen Logik legte *M. Schönfinkel* im Jahre 1924. Seither haben verschiedene Forscher daran gebaut; vor allem sind hier zu erwähnen *H. B. Curry* — einer der Autoren dieses Buches — und *A. Church*. Dadurch ist dieses Gebäude zu einer imposanten Größe angewachsen, und die kombinatorische Logik ist heute eines der wichtigsten Teilgebiete der mathematischen Logik geworden.

Das vorliegende Buch ist der erste Band einer großangelegten Monographie, welche in zwei Bänden das ganze Gebiet systematisch behandeln soll. In wohldurchdachter, ausführlicher und in sich geschlossener Darstellung wird die Theorie von Anfang an entwickelt; viele der Untersuchungen und Resultate des Buches sind neu. Zahlreiche historische Anmerkungen und Literaturhinweise ergänzen den Text. Vor allem beschäftigt sich dieser Band mit der „reinen" (pure) kombinatorischen Logik, welche die formalen Beziehungen der Kombinatoren zueinander untersucht. Es werden sowohl der λ-Formalismus von

A. Church als auch die synthetische Theorie der Kombinatoren eingehend dargestellt und die Äquivalenz dieser beiden Theorien bewiesen. In den drei letzten Kapiteln jedoch werden die Anfangsgründe der „folgernden" (illative) kombinatorischen Logik behandelt, in welcher den Kombinatoren „Bedeutungen" zugeschrieben werden.

Es ist zu hoffen, daß auch der zweite Band in nicht allzu ferner Zeit erscheinen und diese so erfolgreich begonnene Gesamtdarstellung der kombinatorischen Logik zum Abschluß bringen wird. *W. Nöbauer*, Wien

Zahlwort und Ziffer. Eine Kulturgeschichte der Zahl. Von *K. Menninger*. Mit 294 Textabb., 314 S. Zweite neubearbeitete und erweiterte Auflage. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht. 1958. DM 40.—.

Gegenüber der ersten Auflage (1934) liegt hier eine Neubearbeitung vor, erweitert durch neuen Stoff, neue Einsichten und neue Bilder. Die Zahlen im Zählen und Rechnen der Völker erfahren hier eine entwicklungsgeschichtliche Darstellung von solcher Ausführlichkeit, Anschaulichkeit und Lebendigkeit, daß das Buch den Mathematikern und einem breiten Kreis kultivierter Leser sehr empfohlen werden kann. Das Buch setzt einen Verfasser voraus, der nicht nur in der Geschichte der Mathematik, sondern auch philologisch bewandert ist. Nicht von Mathematik im engeren Sinne handelt dieses Buch, es zeigt vielmehr, wie Zahlwörter, Zahlzeichen und Zahlenrechnen sich in der Geschichte der Völker entwickelt haben. Da gibt es wie auf anderen Gebieten gerade Entwicklungen, aber auch Fehlentwicklungen und abgestorbene Zweige der Entwicklung.

Im ersten Band lesen wir, wie die Zahlwörter bei verschiedenen Völkern nach sehr verschiedenen Grundsätzen gebildet werden (vor allem Stufungen nach 5, 10 und 20 Einheiten, aber auch nach 12 und 60 Einheiten, unter babylonischem Einfluß) und wie aus indogermanischen und anderen Zahlwörtern von heute und einst die Entwicklung des Zählens erschlossen werden kann. Daß die Zahlreihe überhaupt unbegrenzt fortgesetzt werden kann, ist eine erst spät auftretende Erkenntnis bei den Indern und bei *Archimedes* (Sandrechnung). Der zweite Band bringt zunächst Fingerzahlen und Fingerrechnen bei verschiedenen Völkern, dann verschiedene Arten von Zahlzeichen, die Zahlschriften der Goten, der Griechen, der Römer und den Siegeszug der indischen Stellenschrift über Arabien nach Europa, aber auch die seltsamen Zahlsprachen und Zahlschriften des Fernen Ostens. Sehr interessant sind auch die Abschnitte über verschiedene Rechenbretter bei Griechen und Römern, im Mittelalter, in Rußland, China und Japan.

Übersichtliche Zusammenfassungen und Zeittafeln, ein reichhaltiges Verzeichnis des Schrifttums und ein verläßliches Sachverzeichnis erleichtern dem Leser das Eindringen in das umfangreiche Gebiet. *F. Hohenberg*, Graz

Matrizenrechnung. Teil I: Allgemeine Theorie. Von *F. R. Gantmacher*. (Hochschulbücher für Mathematik: Band 36.) Mit 5 Textabb., XI, 324 S. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften. 1958. Geb. DM 26.80.

Vergleicht man die zahlreichen Lehrbücher über lineare Algebra, so erkennt man sofort, daß das vorliegende Buch auf hohem Niveau geschrieben ist. Vom Leser wird die Determinantentheorie als bekannt vorausgesetzt. Das Ziel ist, die Probleme der Matrizentheorie wie auch ihre mannigfachen Anwendungen umfassend darzustellen. Band I bringt die allgemeine Theorie, während Band II

viele Anwendungen enthalten wird. Die ersten 5 Kapitel umfassen die Grundlagen und einige Anwendungen. Sie bringen eine Einführung in die Matrizenrechnung, den Gaußschen Algorithmus (Eliminationsmethode) mit praktischen Anwendungen, lineare Operatoren im n-dimensionalen Vektorraum, Eigenwertprobleme, charakteristisches Polynom, Minimalpolynom und Matrizenfunktionen. Kapitel VI und VII bringen zwei unabhängige Darstellungen der Elementarteilertheorie; die eine baut auf der Äquivalenz von Polynommatrizen auf (analytische Theorie), während die zweite von Struktureigenschaften linearer Operatoren ausgeht (geometrische Theorie). Kapitel VIII handelt von einigen Typen von Matrizengleichungen, z. B. $AX = XB$, $X^m = A$, $e^X = A$. Die Auflösung erfolgt mit Hilfe der Elementarteilertheorie. Im Kapitel IX werden Eigenschaften der linearen Operatoren untersucht, die mit der Metrik des Raumes zusammenhängen. Ganz naturgemäß ergeben sich damit spezielle Klassen von Matrizen (normale, hermitische, unitäre, symmetrische, schiefsymmetrische, orthogonale Matrizen). Kapitel X handelt von quadratischen Formen, hermitischen Formen und Hankelschen Formen. Als Anwendungen werden kleine Schwingungen von Systemen mit n Freiheitsgraden gebracht. *N. Hofreiter*, Wien

Elementy Algebry Wyzszej. Von *A. Mostowski* und *M. Stark*. (Biblioteka Matematyczna: Tom 16.) 368 S. Warszawa: Państwowe Wydawnictwo Naukowe. 1958. Ceny zl. 32.—.

Dies ist eine breit geschriebene sehr elementare Einführung in die Algebera mit Ausschluß der Galoisschen Theorie. Auf die Begriffe der abstrakten Algebra wird im Hinblick darauf teilweise verzichtet, daß das Buch auch für Studenten des ersten Jahres leicht lesbar sein soll. In den ersten drei Kapiteln werden Dinge wie vollständige Induktion, Definition des Summen- und Produktzeichens, Kombinatorik, polynomischer Lehrsatz, sowie die Eigenschaften der reellen und komplexen Zahlen auseinandergesetzt. Dann folgen zwei Kapitel über Determinanten, lineare Vektorräume und Gleichungen. Kapitel 6 und 7 enthalten die algebraischen Eigenschaften der Polynome einer Veränderlichen, Interpolationsformeln, rationale Funktionen, sowie den Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra. Es folgen Gleichungen mit einer Unbekannten bis zum vierten Grad und in einem weiteren Kapitel Reduzibilität von Polynomen sowie einiges über algebraische und transzendente Zahlen. Bei den im folgenden behandelten Polynomen mit mehreren Variablen und symmetrischen Funktionen finden sich z. B. auch die Tschirnhausentransformation und die Bring-Jerrardsche Normalform der Gleichung 5. Grades. In dem mit „Eliminationstheorie" überschriebenen Kapitel 11 wird auch der Satz von *Bézout* in seiner einfachsten Form hergeleitet. Das Schlußkapitel bringt die Theorie der quadratischen Formen und ein Anhang verschiedene spezielle Sätze über Determinanten und Matrizen, wie z. B. den Satz von *Cayley* und *Hamilton*.

Durch die ausführliche und geschickte Darstellung, welche noch durch anregende Übungsaufgaben ergänzt ist, werden dem Leser viele Dinge beigebracht, die er vielleicht anderwo mit mehr Mühe erarbeiten müßte. *K. Prachar*, Wien

Introduction à l'algèbre supérieure et au calcul numérique algébrique. Von *L. Derwidué*. 431 S. Paris: Masson et C^{ie}, Liège: Sciences et lettres, 1957. Broché fr. 6000.—; Cartonné toile fr. 6600.—.

Das Buch unterscheidet sich von den üblichen Lehrbüchern der Algebra, weil es die praktische Seite viel mehr betont. Das zeigt schon der Anfang, wo das Rechnen mit Tischrechenmaschinen erklärt wird. Dann folgen komplexe

Zahlen. Es werden viel mehr Hilfsmittel der Analysis als sonst üblich herangezogen. Auf die Reinheit der algebraischen Methode wird ganz verzichtet. Inhaltlich ist das Buch sehr reich: Determinanten, lineare Gleichungssysteme, algebraische Gleichungen, Eliminationstheorie, lineare Substitutionen, quadratische Formen, Matrizenrechnung, Eigenwertprobleme, Elementarteilertheorie, Stabilitätskriterien und Gruppentheorie. Es wird einiges aus der Darstellungstheorie der Gruppen geboten, andererseits fehlen manche Beweise von grundlegenden Sätzen der Gruppentheorie. Von der Körpertheorie wird nur sehr wenig gebracht, die Galoische Theorie fehlt ganz. Besonders ausführlich werden die praktische Auflösung von linearen Gleichungssystemen, die praktische Auflösung von algebraischen Gleichungen und die praktische Ermittlung von Eigenwerten und -vektoren behandelt. Dazu wird eine große Anzahl von Methoden geboten und viele Beispiele werden vollständig durchgerechnet. Das Buch ist den Ingenieuren, Physikern und Mathematikern gewidmet. Es bietet ihnen viel Theorie auf knappem Raum und eine große Anzahl bewährter Rechenmethoden.

N. Hofreiter, Wien

Lineare Algebra. Von *W. Graeub.* (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften: Band XCVII.) Mit 7 Textabb., XI, 219 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1958. DM 35.70, Gln. DM 39.—.

In diesem Buch wird die lineare Algebra von Grund auf entwickelt. Der modernen Betrachtungsweise dieses Gegenstandes entsprechend stehen im Mittelpunkt der Darstellung die Begriffe des linearen Raumes und der linearen Abbildung; der Verfasser hat es aber sehr gut verstanden, in der Abstraktion Maß zu halten, und hat sich auch nicht gescheut, auf Verfahren der praktischen Rechnung einzugehen. Der ganze Aufbau des Buches ist wohldurchdacht, und der Stil geradezu mustergültig, so daß der Leser beim Studium wenig Mühe aber großen Genuß haben wird; Vorkenntnisse wird er kaum benötigen; zahlreiche Übungsaufgaben geben ihm Gelegenheit, das Gelernte zu erproben und zu vertiefen. Alles in allem liegt hier ein Werk vor, das sich wirklich würdig in die klassische Tradition der „Gelben Sammlung" einfügt.

Die Auswahl und Anordnung des Stoffes geht aus dem Inhaltsverzeichnis hervor: Lineare Räume. Lineare Abbildungen und Gleichungssysteme. Determinanten. Orientierte lineare Räume. Multilineare Algebra. Der Euklidische Raum. Lineare Abbildungen Euklidischer Räume. Symmetrische Bilinearfunktionen. Flächen zweiter Ordnung. Unitäre Räume. Invariante Unterräume.

W. Nöbauer, Wien

Commutative Algebra. Band 1. Von *O. Zariski* und *P. Samuel*, unter der Mitarbeit von *I. S. Cohen.* (University Series in Higher Mathematics.) XI, 329 S. Princeton, N. J.-New York-London-Toronto: D. Van Nostrand Company. 1958. $ 6.95.

Unter den zahlreichen vorhandenen Büchern über Algebra wird dieses Werk eine durchaus eigenständige Stellung einnehmen, wie schon aus dem vorliegenden ersten Band zu erkennen ist. Die Verfasser rücken nämlich jene Zweige der Algebra in den Vordergrund, welche für ihr Hauptarbeitsgebiet, die algebraische Geometrie, von Bedeutung sind. Dieser erste Band beschäftigt sich vor allem mit der Idealtheorie der kommutativen Ringe, während der geplante zweite Bewertungstheorie Polynom- und Potenzreihenringe und lokale Algebra behandeln soll. Das Buch hat durchaus den Charakter eines Lehrbuches, denn es setzt kaum Vorkenntnisse voraus, und die Darstellung ist so breit, daß es leicht

und flüssig gelesen werden kann. Für den Fachmann wären an manchen Stellen Literaturhinweise erwünscht gewesen.

Im ersten Kapitel werden die fundamentalen Begriffe Gruppe, Ring, Körper, Polynomring, Vektorraum usw. eingeführt; bemerkenswert ist die ausführliche Behandlung der Quotientenringe. Das zweite Kapitel bringt die Grundlagen der Körpertheorie unter besonderer Berücksichtigung der transzendenten Erweiterungen und mit einer modernen Darstellung der Differentiationen. Das dritte Kapitel enthält die Theorie der Moduln und Ideale in kommutativen Ringen und behandelt schließlich auch die Begriffe des Tensorproduktes von Ringen und der freien Hülle von Integritätsbereichen. Das vierte Kapitel ist den Noetherschen Ringen gewidmet, während im fünften die Dedekindschen Ringe — welche definiert werden als Integritätsbereiche, in denen jedes Ideal Produkt von Primidealen ist — und ihre Erweiterungen ausführlich untersucht werden.

Inhalt und Form des ersten Bandes berechtigen uns, dem Erscheinen des zweiten mit Interesse und Erwartung entgegenzusehen. *W. Nöbauer*, Wien

Colloque d'Algèbre Supérieure, tenu a Bruxelles du 19 au 22 Décembre 1956. Herausgegeben von: Centre Belge de Recherches Mathématiques. 293 S. Louvain: Ceuterick. 1957. 250 francs belges.

Bei jenem Kolloquium, dessen Vorträge in dem Band wiedergegeben werden, sprachen folgende Damen und Herren: *M.-L. Dubreil-Jacotin* (über Reynolds-Transformationen), *P. Dubreil* (Halbgruppen), *W. Krull* (Bewertungen mit nichtarchimedisch geordneter Wertegruppe), *L. Lesieur* und *R. Croisot* (Noethersche Theorie der Ringe, Halbgruppen und Moduln), *G. Higman* (Burnsidesches Problem), *M. Krasner* (Approximation von Körpern durch Körper der Charakteristik Null), *J. A. Green* (Polynome von Hall), *L. Lombardo-Radice* (algebraisch-geometrische Fragen in projektiven Ebenen), *P. Samuel* (lokale Algebra), *E. Witt* (quadratische Formen), *L. Waelbroeck* (Algebren von regulären Elementen), *J. Tits* (algebraische Analoga der halbeinfachen komplexen Gruppen). *W. Nöbauer*, Wien

A Survey of Binary Systems. Von *R. H. Bruck*. (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Neue Folge: Heft 20; Reihe: Gruppentheorie.) VIII, 185 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1958. Geh. DM 36.—.

Die ersten algebraischen Strukturen mit einer zweistelligen Operation, welche systematisch untersucht wurden, waren die Gruppen. Neben den Gruppen gibt es aber noch verschiedenen andere „binäre Systeme", über die in den letzten Jahren eine ausgedehnte Literatur entstanden ist und welche zum Teil auch für andere Gebiete der Mathematik von Bedeutung sind. Ein geschlossener Überblick über den gegenwärtigen Stand der Forschung bei diesen Systemen, wie er hier erstmalig gegeben wird, ist daher sehr willkommen. Naturgemäß ist schon wegen der großen Fülle des zu behandelnden Materials eine ausführliche Darstellung nicht immer möglich, wird jedoch auf den Teilgebieten gegeben, wo schon eine einigermaßen abgerundete Theorie vorliegt, wie etwa bei der Idealtheorie in Halbgruppen oder bei der Homomorphismentheorie der Loops. Von großem Wert ist auch das umfangreiche Literaturverzeichnis, das über 400 Arbeiten anführt.

Das Buch beginnt mit dem allgemeinsten binären System, dem Gruppoid. Ein Gruppoid mit eindeutiger Rechts- und Linksdivision heißt Quasigruppe, eine Quasigruppe mit Einheit heißt Loop. Die Theorie der Loops, wie sie hier

recht ausführlich behandelt ist, zeigt in ihren Begriffsbildungen und Sätzen eine große Ähnlichkeit mit der Theorie der Gruppen. Ein wichtiger Spezialfall der Loops sind die *Moufang*-Loops, welche durch das Erfülltsein der Identität $(xy)\,(zx) = [x(yz)]\,x$ gekennzeichnet sind; ihre Theorie, insbesondere die Theorie der kommutativen *Moufang*-Loops, wird ebenfalls ausführlich dargestellt. Ein Gruppoid, in dem das Assoziativgesetz erfüllt ist, heißt Halbgruppe; auch auf die Theorie der Halbgruppen wird ziemlich gründlich eingegangen.

Man kann sicherlich erwarten und hoffen, daß das Buch die weitere Forschung klärend, vereinheitlichend und richtungsweisend beeinflussen wird.

W. Nöbauer, Wien

Tables of Partitions. Von *H. Gupta, C. E. Gwyther* und *J. C. P. Miller*. (Royal Society Mathematical Tables: 4.) XXXIX, 132 S. Cambridge: At the University Press. 1958. £ 3. 3 s. net.

Dies sind Tafeln für die Anzahl $p(n, m)$ der Partitionen einer natürlichen Zahl n in höchstens m Teile, und Hilfstafeln für die Anzahlen $p_2(n, m)$ und $p_3(n, m)$ gewisser mit Gewichten versehener Partitionen. In einem Einführungskapitel werden die Zusammenhänge zwischen diesen und zahlreichen anderen Partitions-Anzahlen besprochen, z. B. der Anzahl der Partitionen in genau m Summanden, in Summanden, deren größter gerade $= m$ ist, in genau m ungleiche Summanden, usw. Für $n \leqslant 200$ wurde $p(n, m)$ für $1 \leqslant m \leqslant 100$ tabelliert und für $200 < n \leqslant 400$ mit $1 \leqslant m \leqslant 50$, wobei sich z. B. für $p(400, 50)$ eine 19stellige Zahl ergibt. Die Berechnungen wurden von zwei verschiedenen Rechenzentren durchgeführt und erscheinen daher besonders zuverlässig — ein Tafelwerk, für das man der Royal Society und den Verfassern zu besonderem Dank verpflichtet ist.

K. Prachar, Wien

Tabellen reduzierter positiver ternärer quadratischer Formen. Von *H. Brandt* und *O. Intrau*. (Abhandlungen der Sächsischen Akademie der Wissenschaften zu Leipzig, Math.-naturwiss. Kl.: Band 45, Heft 4.) XVII, 261 S. Berlin: Akademie-Verlag. 1958. Brosch. DM 16.—.

Da die Tabellen der positiven ternären quadratischen Formen von *Seeber* und *Eisenstein* wenig umfangreich sind, so hat sich *O. Intrau* auf Anregung von *H. Brandt* der großen Mühe unterzogen, Tabellen herzustellen, die 36.000 Formen umfassen. Die Koeffizienten der positiven ternären quadratischen Formen werden als rational angenommen. Die Formen werden in üblicher Weise reduziert genannt, wenn das zugehörige Parallelgitter durch die ersten drei Minima erzeugt wird. Das Buch enthält alle reduzierten positiven ternären quadratischen Formen mit den Diskriminanten -2 bis -1000. Rechteckige Felder charakterisieren jede Ordnung und ihre Unterteilung in Geschlechter. Die Tabellen enthalten außerdem die Charaktere, die Maße der Geschlechter und die Stammdiskriminanten. Zu jeder Form wird die Anzahl der automorphen Substitutionen angegeben.

N. Hofreiter, Wien

Funktionentheorie. Von *H. Kneser*. (Studia Mathematica / Mathematische Lehrbücher: Band 13.) Mit 31 Textabb., 422 S. Göttingen: Vandenhoeck u. Ruprecht. 1958. Geb. DM 34.—.

Es mag bei dieser Darstellung des schon so oft in Lehrbüchern behandelten Gebietes besonders hervorgehoben werden, daß sie bei aller bequemen Lesbarkeit immer wieder verschiedene Gesichtspunkte heranzieht und so die vielseitige

Persönlichkeit des Verfassers erkennen läßt. So wird schon relativ früh der Weierstraßsche Vorbereitungssatz gezeigt, wie überhaupt die Funktionen mehrerer Variablen möglichst in die Darstellung einbezogen werden; so wird auch im Anhang der Cauchysche Integralsatz für mehrere Variable gebracht und ein anderer Beweis des Mittag-Lefflerschen Satzes so gegeben, daß er auf mehrere Variable übertragen werden kann.

Von den nicht zu den Grundbegriffen gehörigen Abschnitten möchte ich etwa den über die Riemannsche Zetafunktion, den über die gewöhnlichen und speziell über die hypergeometrischen Differentialgleichungen und bei der konformen Abbildung das Kapitel über die einfach zusammenhängenden Kreisbogenvielecke hervorheben. Im Anhang folgen dann noch Abschnitte über die Einzigkeit des komplexen Zahlensystems, die Zerlegung der Ebene durch einfach geschlossene Streckenzüge, die Eulersche Summenformel und ein Abschnitt über lineare Abbildungen von Vektorräumen.

Für die Studia Mathematica, in deren Rahmen dieses Werk erscheint, ist das Buch ein weiterer Gewinn, das man gern empfehlen wird. *H. Hornich*, Wien

The Taylor Series. An introduction to the theory of functions of a complex variable. Von *P. Dienes*. Mit 67 Textabb., X, 552 S. New York: Dover Publications Inc. 1957. $ 2.75.

Das Buch ist ein unveränderter Abdruck der ersten 1931 erschienenen Auflage. Es bringt eine Einführung in die Funktionentheorie auf der Grundlage von *Cauchy* und *Weierstraß*. Nach einer breiten Einleitung, in der die notwendigen Hilfsmittel aus der reellen Analysis bereitgestellt werden, werden unendliche Reihen ausführlich dargestellt. Entsprechend dem Aufbau von *Weierstraß* wird eine Funktion durch eine Potenzreihe innerhalb ihres Konvergenzkreises definiert. Die Erweiterung erfolgt durch analytische Fortsetzung. Dann erst wird die komplexe Differentiation und die komplexe Integration gebracht. Vom Kapitel VIII an dringt das Buch tiefer in die Funktionentheorie ein. Es kommen: der Satz von *Picard*, der Abbildungssatz von *Riemann*, die Darstellung von Funktionen durch Reihen und Integrale, Untersuchungen von *Hadamard* über die Singularitäten von analytischen Funktionen, Überkonvergenz und ihr Zusammenhang mit Lücken nach *Ostrowski*, eine systematische Darstellung von divergenten Reihen, Verhalten von Funktionen in der Nähe des Konvergenzkreises, Zusammenhänge zwischen Divergenz und Singularitäten. Stets wird der Zusammenhang zwischen den Eigenschaften der Koeffizienten der Potenzreihen und den Eigenschaften der Summenfunktion betont. Damit wird der reiche Inhalt nur angedeutet. Wenn das Buch kein ausgezeichnetes Werk wäre, hätte gewiß kein Neudruck nach 26 Jahren stattgefunden. *N. Hofreiter*, Wien

Univalent Functions and Conformal Mapping. Von *J. A. Jenkins*. (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Neue Folge: Heft 18; Reihe: Moderne Funktionentheorie.) Mit 6 Textabb., VIII, 169 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1958. Geh. DM 34.—.

Diese Monographie gilt in erster Linie den Arbeiten aus dem Gedankenkreis von *Grötzsch*, der wohl als erster systematisch die Theorie der schlichten Funktionen behandelt hat, wobei vor ihm natürlich *Löwner* und später vor allem *Grunsky*, *Schiffer*, *Golusin* u. a. zu nennen sind. Die dabei im Vordergrund stehenden Extremalprobleme werden in ihrer Anwendung, speziell für das Koeffizientenproblem in übersichtlicher Darstellung gebracht. *H. Hornich*, Wien

Multivalent Functions. Von *W. K. Hayman.* (Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics, No. 48.) Mit 8 Textabb., VIII, 151 S. Cambridge: At the University Press. 1958. 27 s. 6 d. net.

Eine sehr dankenswerte zusammenfassende Behandlung der Funktionen, die jeden Wert höchstens p-mal bzw. im Mittel höchstens p-mal annehmen, neben einem kurzen Abriß der schlichten Funktionen (wichtigste Sätze und Löwnersche Theorie), die diesem relativ jungen Gebiet sicher neue Freunde gewinnen wird. *H. Hornich*, Wien

Lectures on Ordinary Differential Equations. Von *W. Hurewicz.* Mit 26 Textabb., XVII, 122 S. The Technology Press of the Massachusetts Institute of Technology and New York: J. Wiley & Sons, London: Chapmann & Hall. 1958. $ 5.—.

Einleitend hält *S. Lefschetz* einen Nachruf auf den 1956 verunglückten Autor, dessen bedeutendste Arbeiten der Dimensionstheorie und der Theorie der Homotopiegruppen angehörten. Das Buch ist eine Wiedergabe von Vorlesungen, die der Autor an Universitäten in USA. gehalten hat. Sie bieten dem an der Theorie interessierten Leser eine sehr exakte Einführung in die Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen. Sie bringen Existenz- und Eindeutigkeitsbeweise in allgemeinen Bereichen, beschreiben die Struktur der Lösungen von linearen Systemen, diskutieren Singularitäten und schließen mit einer geometrischen Theorie der 2-dimensionalen nicht-linearen Systeme (Theorem von *Poincaré* und *Bendixson*). *N. Hofreiter*, Wien

Theory and Problems of Differential Equations. Von *F. Ayres, Jr.* Including 560 Solved Problems. (Schaum's Outline Series.) 296 S. New York: Schaum Publishing Co. 1952. Net price to college bookstores $ 1.90; list price $ 2.95.

Das Buch enthält alle Typen von gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen, die in den üblichen Lehrbüchern behandelt werden. Jedes Kapitel beginnt mit einer kurzen Aufzählung von Definitionen, Sätzen und Lösungsmethoden. Daran schließen sich zahlreiche Aufgaben, die meist vollständig durchgerechnet werden. So ist das Buch in erster Linie ein Übungsbuch, das den Studierenden eine wertvolle Ergänzung zu Lehrbüchern ist. Besondere Sorgfalt wurde auf die Auswahl der Aufgaben verwandt. Insbesondere möchte ich die Aufgaben aus Geometrie und Physik hervorheben. *N. Hofreiter*, Wien

Aufgabensammlung zu den gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen. Von *G. Hoheisel.* (Sammlung Göschen, Bd. 1059.) 124 S. Dritte, durchgesehene und verbesserte Auflage. Berlin: Walter de Gruyter & Co. 1958. DM 2.40.

Mit Rücksicht auf die minimalen Änderungen verweise ich auf die Besprechung in dieser Zeitschrift: Mh. Math. **56**, 174 (1952). *N. Hofreiter*, Wien

Introduction to Difference Equations. With Illustrative Examples from Economics, Psychology, and Sociology. Von *S. Goldberg.* Mit 9 Textabb., XII, 260 S. New York: J. Wiley & Sons. London: Chapman & Hall. 1958. $ 6.75.

An Vorkenntnissen wird nur Elementarmathematik vorausgesetzt. Alle weiteren Hilfsmittel aus der linearen Algebra und der Analysis werden entwickelt. Interessenten des Buches sind: a) Studierende der Mathematik, b) Studierende

der Sozialwissenschaften, die eine leicht verständliche und solide Einführung in die Theorie der Differenzengleichungen bekommen und ihre Anwendbarkeit auf Sozialwissenschaften erproben wollen. Das Buch enthält ausführlich die linearen Differenzengleichungen 1. und 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten, erörtert das Grenzverhalten der Lösungen und bringt im letzten Kapitel auch Randwertaufgaben, erzeugende Funktionen und Matrizenrechnung zur Lösung von einfachen Systemen von Differenzengleichungen. Zahlreich sind die gebotenen Beispiele, die hauptsächlich den Sozialwissenschaften entnommen sind.

N. Hofreiter, Wien

Functionals Analysis and Semi-Groups. Von *E. Hille* und *R. S. Phillips*. (American Mathematical Society, Colloquium Publications, Vol. XXXI). XII, 808 S. Revised Edition. Providence: American Mathematical Society. 1957.

Die erste Auflage des bekannten Werkes, von *E. Hille* alleinverfaßt, erschien 1948. Seither hat die Theorie bedeutende Fortschritte erzielt, vor allem auch durch die Untersuchungen der Verfasser, die eine Neuauflage des Buches erforderlich machten. Die Vermehrung des Stoffes zeigt sich darin, daß jetzt das Buch um 300 Seiten mehr enthält, als die erste Auflage. Es bringt außer der Theorie fast alle Anwendungen der Theorie. Bei dem weiten Anwendungsbereich der Halbgruppen und Banachschen Algebren gibt es fast kein Gebiet der Analysis, welches hier nicht eingeordnet werden kann. Das Buch ist also ein Handbuch, trotzdem hat es den Charakter eines Lehrbuches bewahrt. Dies wird erreicht durch vorbereitende Zusammenfassungen am Beginn jedes Kapitels und einer günstigen Anordnung des Stoffes. Das Werk gliedert sich jetzt in 5 Teile: Funktionalanalysis, Halbgruppen, höhere Theorie der Halbgruppen, spezielle Halbgruppen und Anwendungen, Erweiterungen der Theorie. Das Studium dieses Buches erfordert nur Kenntnisse der Differential- und Integralrechnung und der einfachsten Kenntnisse aus der linearen Algebra.

E. Hlawka, Wien

Normed Linear Spaces. Von *M. M. Day*. (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Neue Folge: Heft 21, Reihe: Reelle Funktionen, besorgt von *R. P. Halmos*). 139 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1958. DM 28.—.

Die Theorie der linearen Räume mit Norm, also wenn als vollständig vorausgesetzt, die Theorie der Banachschen Räume, ist erneut eine der Zentren der Forschung. Die zahlreichen Ergebnisse, welche in den letzten Jahren erzielt wurden, haben die Theorie und ihre Anwendungen erweitert und vereinfacht, doch sind die Arbeiten über viele Zeitschriften verstreut. Diese Arbeiten sind auch nicht leicht zu lesen, vor allem durch die Mannigfaltigkeit der verwendeten, oft wechselnden, Begriffsbildungen, die eine Wertung der Ergebnisse erschweren. Der Verfasser hat es nun unternommen, alle Ergebnisse, welche bisher gefunden wurden und von welchen man erwarten kann, daß sie von bleibender Bedeutung sind, zusammenzustellen. So ist ein Buch entstanden, das in knapper, aber klarer Weise, in dieses wichtige und aktuelle Gebiet einführt, als bequemes Nachschlagewerk dienen kann und zu weiteren Untersuchungen anregen wird. Das Buch ist, wie man bei diesem Verlag gewohnt ist, vortrefflich ausgestattet.

E. Hlawka, Wien

Operational Mathematics. Von *R. V. Churchill*. Zweite Auflage. Mit 106 Textabb., IX, 337 S. New York-Toronto-London: McGraw Hill Book Company. 1958. 54/6d.

Das Buch ist ein Lehrbuch über die Theorie und die Anwendungen der Laplacetransformation, die die wichtigste Operatorenmethode ist. Es vermittelt den Studierenden der Mathematik, der Physik und der Technik grundlegende Kenntnisse der Laplacetransformation und legt das Hauptgewicht auf die Anwendungen. Mit Hilfe der Laplacetransformation kann man viele Probleme der Physik und der Technik lösen, sofern sie auf gewöhnliche oder partielle Differentialgleichungen führen. Besonders ausführlich werden Randwertaufgaben von partiellen Differentialgleichungen mit Hilfe der Laplacetransformation gelöst. Das Buch beschränkt sich keineswegs auf Laplacetransformationen im Reellen und stellt zur Bequemlichkeit des Lesers die erforderlichen Hilfsmittel aus der Funktionentheorie zur Verfügung. An zahlreichen Beispielen aus der Wärmeleitung und den mechanischen Schwingungen wird der vorteilhafte Gebrauch der Laplacetransformation, die eine komplexe Veränderliche enthält, gezeigt. Das letzte Kapitel bringt Fouriertransformationen als weiteres Beispiel von Integraltransformationen. Die gute und ausführliche Darstellung ermöglicht den Studierenden ein klares Verstehen, wie, wann und warum Integraltransformationen angewandt werden. *N. Hofreiter*, Wien

Ebene Inzidenzgeometrie. Von *G. Pickert*. (Schriftenreihe zur Mathematik, Heft 8.) Mit 14 Textabb., 92 S. Frankfurt am Main-Hamburg: Otto Salle Verlag. 1958. DM 6.40.

Der Zweck dieses kleinen Heftchens ist die Illustration des Wesens eines Axiomensystems und dessen, was man unter „more geometrico" zu verstehen habe, an Hand der Inzidenzgeometrie der affinen und projektiven Ebene. Gerade diese durch je drei Axiome erklärten Systeme besitzen die nötige Einfachheit, um die logische Struktur mathematischer Beweise ohne allzu große mathematische Vorkenntnisse klar erkennen zu lassen. Die Darstellung, wohl hauptsächlich für Nichtmathematiker bestimmt, geht daher sachlich nirgends sehr weit (ausgenommen vielleicht der Aufbau der analytischen Geometrie im Rahmen der Inzidenzgeometrie aus dem *Desarguess*chen Satz, was algebraisch die Zugrundelegung eines Schiefkörpers bedeutet). Besonders gelungen scheint das Kapitel über endliche affine Ebenen. Durch diese nicht mehr der unmittelbaren Anschauung entsprechenden Modelle der affinen Inzidenzgeometrie wird wohl am deutlichsten die nur implizite Definition der Begriffe „Punkt" und „Gerade" durch das Axiomensystem und die vielseitige Anwendbarkeit eines Systems bloßer Relationen demonstriert. Im letzten Abschnitt wurden die logischen Beweisregeln, soweit sie im Hauptteil des Buches Verwendung finden, zusammengestellt. Dieses Kapitel, wohl auch als Orientierung über die formale Logik verwendbar, weist damit auf den engen Zusammenhang zwischen Mathematik und formaler Logik hin und kann im Leser ein Verständnis dafür erwecken, wie wichtig die formale Logik für eine Untersuchung der Struktur mathematischer Beweise ist. *H. Brauner*, Wien

Grundlagen und analytischer Aufbau der Projektiven, Euklidischen, Nichteuklidischen Geometrie. Von *L. Heffter*. Dritte, wesentlich überarbeitete Auflage. Mit 66 Textabb., 191 S. Stuttgart: B. G. Teubner Verlagsgesellschaft. 1958. Ln. DM 16.80.

Die ersten Ansätze zu diesem nun in dritter, wesentlich verbesserten Auflage vorliegenden Buche finden sich schon in dem von *L. Heffter* gemeinsam mit *C. Koehler* im Jahre 1905 herausgegebenen „Lehrbuch der analytischen Geometrie I". Der Grundgedanke ist dabei, eine axiomatische Begründung der

projektiven Geometrie zu geben, die nur auf den Inzidenzaxiomen ruht, sowie durch fortschreitende Spezialisierung bis zur euklidischen Geometrie vorzustoßen. Im Gegensatz zu dem 1940 unter gleichem Titel erschienenen Buch wird hier ein vollständiger Aufbau der projektiven Geometrie, und zwar ihrer Grundlagen und ihrer analytischen Behandlung unter Durchführung aller Beweise geboten.

Der erste Abschnitt („Grundlagen der Geometrie") bringt ausgehend von den Inzidenzaxiomen und den auf diese zurückführbaren Anordnungsaxiomen bei Verwendung des Stetigkeitsaxioms von *Dedekind* die für die projektive Geometrie der Grundgebilde I., II. und III. Stufe nötigen Begriffsbildungen. Schon hier sind jene Stellen im Aufbau der projektiven Geometrie fixiert, wo durch Spezialisierung die affine und euklidische Geometrie gewonnen werden können, sowie auf die Abzweigungen zu den nichteuklidischen Geometrien hingewiesen. Das zweite Kapitel („projektive Geometrie") sowie die mit „Parallelgeometrie" und „Orthogonalgeometrie" überschriebenen folgenden Kapitel enthalten eine analytische Behandlung dieser Geometrien, die vor allem die geometrischen Verhältnisse bei weitgehendster Zurückstellung kalkülmäßiger Probleme betont. Gerade in diesen Kapiteln erweist sich die Fähigkeit des Verfassers zu prägnanten und leicht verständlichen Formulierungen, die neben den 66 ausgezeichneten Textfiguren jeden Leser sofort ansprechen.

Im letzten, der nichteuklidischen Geometrie gewidmeten Abschnitt werden zunächst die *Cayley-Klein*schen Modelle besprochen und hier etwa jene Formeln für die Bewegung im Raum und in der Ebene angegeben, die durch Spezialisierung einer gewissen Konstanten den hyperbolischen, parabolischen und elliptischen Fall umfassen. Die Entwicklungen werden hier bis zu einer nichteuklidischen Trigonometrie, den Kreisen und Kugeln sowie den *Clifford*-Flächen getrieben. Als Abschluß sind jene von den *Klein*schen Modellen verschiedenen Darstellungsgebiete der nichteuklidischen Geometrie entworfen, die von *L. Heffter* im Jahre 1936 publiziert wurden.

Diese von einem Altmeister der Geometrie besorgte Neubearbeitung seines Buches, die in gewisser Hinsicht die Krönung seiner bisherigen Lebensarbeit auf diesem mathematischen Sachgebiet darstellt, wird gewiß viele neue Freunde gewinnen. *H. Brauner*, Wien

Konvexe Polyeder. Von *A. D. Alexandrow.* (Mathematische Lehrbücher und Monographien, II. Abteilung: Mathematische Monographien, Ed. 8.) Deutsche Übersetzung unter wissenschaftlicher Redaktion von *W. Süss.* Mit 161 Textabb., X, 419 S. Berlin: Akademie-Verlag. 1958. Geb. DM 37.—.

Das Erscheinen dieses Buches ist sehr zu begrüßen. Die Theorie der konvexen Körper verdankt dem Verfasser neue Methoden und wichtige Resultate. Berühmt ist der Satz des Verfassers über die Existenz eines konvexen Polyeders mit gegebenem Netz, um nur ein Beispiel herauszugreifen. Das vorliegende Werk macht nun die Methoden des Verfassers, welche so einfach, so geometrisch und doch so genial sind, bequem zugänglich. Es ist sehr breit geschrieben und setzt nur die einfachsten Mittelschulsätze aus Mathematik voraus. Es kann nicht nur den Studenten, sondern auch den Lehrern an unseren Schulen empfohlen werden und ist für Arbeitsgemeinschaft an unseren Mittelschulen geeignet. Ein herrliches Werk! *E. Hlawka*, Wien

Il teorema di Riemann-Roch per curve, superficie e varietà; questioni collegate. Von *F. Severi.* (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. Neue

Folge: Heft 17; Reihe: Algebraische Geometrie.) VIII, 131 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1958. Steif geheftet DM 23.60.

Der von *Riemann* (1857) angegebene und von *Roch* (1865) vervollständigte Satz bezieht sich auf algebraische Kurven; er gibt die Anzahl der willkürlichen Konstanten an, von denen die allgemeinste rationale Funktion auf der Kurve abhängt, deren Polstellen vorgegeben sind. In seiner projektiven Formulierung handelt es sich um die Dimension der linearen Vollschar, die durch eine Punktgruppe bestimmt ist. Es ist das Verdienst des Verf., bereits vor 50 Jahren die ersten Ansätze zur Verallgemeinerung dieses Satzes auf algebraische Mannigfaltigkeiten höherer Dimensionen gefunden zu haben, nachdem *M. Noether* (1886) eine allerdings unvollständige Formulierung des Satzes für Kurvenscharen auf algebraischen Flächen veröffentlicht hatte. Es zeigte sich aber bald, daß jede Verallgemeinerung erhebliche Schwierigkeiten überwinden muß, ja daß, nur um den Satz exakt aussprechen zu können, viele begriffliche Klärungen notwendig waren oder wenigstens vorausgesetzt werden mußten. Erst in den letzten Jahren ist es gelungen, mit sehr schwierigen Überlegungen vor allem topologischer Natur hier einige Teilergebnisse zu erzielen. Demnach könnte ein unvoreingenommener Beurteiler vermuten, daß die zugrunde liegenden Begriffe und die gewählten Methoden der Sache noch zu wenig angemessen sein dürften.

Die vorliegende Monographie ist in jeder Beziehung außerordentlich aufschlußreich und für die weitere Forschung ganz unentbehrlich. Sie enthält im Zusammenhang mit dem zentralen Problem des Riemann-Rochschen Satzes fast das gesamte moderne Forschungsgebiet der algebraischen Geometrie, und zwar in einer sehr anregenden Darstellung, die von der geschichtlichen Entwicklung ausgehend bis zu den neuesten Ergebnissen vordringt. Jedes Kapitel wird durch eine Zusammenfassung in englischer Sprache eingeleitet. Die Beweise sind meistens in großen Linien skizziert. Der Riemann-Rochsche Satz kann auf mehrere Weisen verallgemeinert werden, und zwar entweder auf lineare Vollscharen von $(r-1)$-dimensionalen Untermannigfaltigkeiten einer V_r, oder allgemeiner auf algebraische und rationale Vollsysteme von k-dimensionalen Untermannigfaltigkeiten $(0 \leqq k \leqq r-1)$. Das erfordert zunächst die Klarstellung der Begriffe der algebraischen und der rationalen Äquivalenz, der regulären Systeme, der k-dimensionalen Irregularität einer Mannigfaltigkeit V_r, der kanonischen Systeme aller Stufen und vieles andere, was für die zukünftige Entwicklung der algebraischen Geometrie überhaupt von entscheidender Bedeutung sein wird. Über den gegenwärtigen Stand unseres Wissens und über die vorhandenen Ansätze auf diesem Gebiet gibt *Severis* Monographie die verläßlichste Auskunft.

W. Gröbner, Innsbruck

Reticoli e geometrie proiettive, Convegno internazionale: Palermo, 25.—29. Oktober 1957, Messina, 30. Oktober 1957. Edito dalla *Unione Matematica Italiana* con il contributo del *Consiglio Nazionale delle Richerche*. VI, 139 S. Roma: Edizioni Cremonese, 1958. Lire 1800.—.

Dieser Bericht über eine in Palermo und Messina stattgefundene Tagung betreffend das Sachgebiet der projektiven Geometrie enthält 20 Vortragsauszüge von italienischen, französischen und deutschen Geometern. Diese Sammlung von Vorträgen, die zum überwiegendsten Teil Probleme der Geometrie endlicher projektiver Ebenen betreffen, gestattet einen Einblick in die modernen und aktuellen Fragen dieses klassischen geometrischen Gebietes. *H. Brauner*, Wien

Applications of Tensor Analysis. (Früher: Applications of the Absolute Differential Calculus.) Von *A. J. McConnell.* Mit 43 Textabb., XII, 318 S. New York: Dover Publications Inc. 1957. $ 1,85.

Diese bekannte Darstellung der Tensoranalysis ist das erstemal 1931 unter anderem Titel erschienen und seither bereits fünfmal aufgelegt worden. Während in den sonst üblichen Darstellungen der Tensorrechnung die Entwicklungen meist in Zusammenhang mit Problemen der Riemannschen Geometrie beziehungsweise der Relativitätstheorie dargestellt werden, ist in diesem Buch der Gedanke verwirklicht, die Tensorrechnung schon wesentlich früher den Studenten als wirksames Rechenmittel in die Hand zu geben. So werden (unter Beschränkung auf den zwei- und drei-dimensionalen Fall) die Formeln der analytischen Geometrie der Geraden, der Ebenen und der Quadriken konsequent unter Verwendung von Tensoren abgeleitet. Der zweite Hauptabschnitt des Buches ist der Kurven- und Flächentheorie im euklidischen dreidimensionalen Raum sowie Problemen der angewandten Mathematik gewidmet. Hier finden sich die Grundgleichungen der Dynamik des Massenpunktes, des starren Körpers und der Flüssigkeiten, sowie eine kurze Behandlung des elektromagnetischen Feldes. Als Anwendung des Formelapparates auf eine vierdimensionale Mannigfaltigkeit allerdings indefiniter Art wird die spezielle Relativitätstheorie behandelt. Ein Anhang stellt den Zusammenhang mit der Bezeichnung jener Bücher der mathematischen Physik her, in denen orthogonale krummlinige Koordinaten ohne Berücksichtigung der Tensorschreibweise Verwendung finden.

Der Wert dieses sowohl für Studenten und Dozenten interessanten Buches wird durch die fast 700 Aufgaben, von denen die schwierigeren mit kurzen Lösungsanleitungen versehen sind, noch wesentlich gesteigert. *H. Brauner*, Wien

An Introduction to Combinatorial Analysis. Von *J. Riordan.* (A Wiley Publication in Mathematical Statistics.) X, 244 S. New York: John Wiley & Sons. London: Chapman & Hall. 1958. $ 8.50.

Die Aufnahme dieses Buches in die Sammlung des Wiley-Verlages über Statistik zeigt, daß es für Statistiker von Interesse ist. Sind doch Kombinationen Hilfsmittel in der Statistik. Außerdem bringt das Buch einiges über Verteilungen. Mehr aber werden Mathematiker für das Buch übrig haben, und zwar jene, die sich für Kombinatorik, erzeugende Funktionen, Zerfällungen von ganzen Zahlen, Graphen, Bäume und Netze interessieren. Auch Liebhaber der Mathematik kommen auf ihre Rechnung, wenn sie an verschiedenen Arten von Spielen und an lateinischen Rechtecken Freude haben und die mathematischen Grundlagen kennen lernen wollen. Das Buch bringt die Theorie in ausführlicher Darstellung und enthält viele Aufgaben am Ende jedes Kapitels. *N. Hofreiter*, Wien

Traité de Statistique Théorique et Appliquée, Analyse Aléatoire — Algèbre Aléatoire. Von *D. Dugué.* Préface de *G. Darmois.* (Collection d'Ouvrages de Mathématiques à l'Usage des Physiciens.) Mit 4 Textabb., XIV, 313 S. Paris: Masson et Cie. 1958. Geb. fr. 5200.—.

Dieses Werk zerfällt in zwei Teile, welche mit „Analyse aléatoire" und „Algèbre aléatoire" überschrieben sind. Es muß gleich gesagt werden, daß es sich dabei um ein großzügig angelegtes Werk handelt, welches viele Dinge enthält, vor deren Darstellung sich die Verfasser ähnlicher Bücher oft gescheut haben. Allerdings muß man zugeben, daß der Verfasser sich mit den Grundlagen der Theorie der zufälligen Größen nicht allzu lange aufgehalten hat und insbesondere die maßtheoretischen Grundlagen nur wenig behandelt.

Im ersten Kapitel wird zunächst der Begriff der zufälligen skalaren oder Vektor-Variablen erklärt (wobei eine solche durch ihre Verteilungsfunktion eingeführt wird). Es folgen verschiedene den Variablen zugeordnete Größen, wie Distanz zweier Variablen (in einem von *Ky-Fan* angegebenen Sinn). Medianwerte, Momente, die von *P. Lévy* eingeführte Konzentrationsfunktion, Regressionsgerade, Kovarianzmatrix und charakteristische Funktion. Besonders die letztere wird genau untersucht und es werden z. B. auch durch die Verteilungsfunktion auszudrückende notwendige und hinreichende Bedingungen dafür gegeben, daß die charakteristische Funktion im Nullpunkt differenzierbar ist. Die von *Bochner* herrührende Kennzeichnung der charakteristischen Funktion wird ohne Beweis angegeben. Kenntnis der Lebesgueschen Integrationstheorie wird vorausgesetzt; offenbar im Hinblick darauf wird auch S. 22 die Vertauschbarkeit des Grenzüberganges für die T mit der Integration über die x nicht genauer begründet, was für einen Anfänger vielleicht etwas schwierig ist. Beim Beweis der Ungleichung von *Liapounoff* S. 15 wäre vielleicht ein Wort darüber zu sagen, wieso das Maximumprinzip für analytische Funktionen für den dort genannten unendlichen Parallelstreifen richtig bleibt. Kapitel 2 ist mit „Convergences" überschrieben und enthält eine gründliche Diskussion der Verschiedenen Arten von Konvergenz, welche bei Folgen stochastischer Variabler auftreten können: Konvergenz dem Verteilungsgesetz nach, Stochastische Konvergenz (= Konvergenz der Wahrscheinlichkeit nach), Konvergenz mit Wahrscheinlichkeit Eins und eine noch etwas einschränkendere Art von Konvergenz, die vollständige Konvergenz mit Wahrscheinlichkeit Eins, welche für eine Folge von Variablen X_k dann eintritt, wenn eine Folge von unabhängigen Variablen mit derselben Randverteilung mit Wahrscheinlichkeit Eins konvergiert. S. 41 unten wird der Anfänger einige Zeit nachdenken müssen, bis er erkennt, was dort unter zufälliger Funktion gemeint ist, ein Begriff, der vorher nicht erklärt wurde. Zwei Sätze von *Slutsky* und verschiedene Untersuchungen über die Nichtvereinbarkeit eines „Norm"- bzw. „Abstand"-Begriffes mit verschiedenen Arten der Konvergenz beschließen dieses Kapitel. Vielleicht hätte hier auch noch die Konvergenz im (quadratischen) Mittel Platz finden können. Im darauffolgenden Kapitel werden verschiedenen Ungleichungen bereitgestellt die später benötigt werden, aber auch an sich sehr interessant und zum Teil wenig bekannt sind. Z. B. findet sich hier außer der Kolmogoroffschen Ungleichung auch eine solche von *P. Lévy*, bei der dieselbe Wahrscheinlichkeit durch die Konzentrationsfunktion abgeschätzt wird. Den verschiedenen Arten des Gesetzes der großen Zahlen für Folgen von unabhängigen zufälligen Variablen ist das nächste Kapitel gewidmet. Hier werden die notwendigen und hinreichenden Bedingungen von *Chintschin* für die stochastische Konvergenz, von *Hsu*, *Robbins* und *Erdös* für die vollständige Konvergenz mit Wahrscheinlichkeit Eins, von *Kolmogoroff* für die Konvergenz mit Wahrscheinlichkeit Eins bewiesen, sowie ein Satz von *Lévy* über unendliche Reihen von zufälligen Variablen. Die Sätze vom iterierten Logarithmus und der Satz von *Kolmogoroff-Smirnoff* werden in Kapitel 5 ausführlich behandelt. Besonders wertvoll ist es, daß nun ein Beweis des letzteren in einem Lehrbuch zur Verfügung steht. Die Begründung der Formel (2) auf S. 112 wird dem Anfänger vielleicht nicht sofort gelingen. Das darauffolgende Kapitel bringt Ergebnisse über die Approximation von zufälligen Funktionen durch „zufällige" Polynome und Interpolationsformeln, wobei — wie im übrigen an einigen anderen Stellen des Buches — auch vom Verfasser gefundene Ergebnisse Platz finden. Den Abschluß des ersten Teiles bildet ein Abschnitt, der mit „Estimation — Information" betitelt ist. Hier werden Fragen der Wirksamkeit von Schätzfunktionen und insbesondere das „Maximum-

Likelihood-Prinzip" untersucht, wobei auch die Konvergenz mit Wahrscheinlichkeit Eins (anstelle der weniger besagenden stochastischen Konvergenz) zugrunde gelegt wird. Auf S. 141 wird sich der Anfänger beim Zitat von Theorem XI aus Kapitel 4 fragen, wieso die Existenz des Erwartungswertes des entsprechenden Absolutbetrages nicht gefordert wird.

Der zweite Teil enthält in Kapitel 10 zunächst eine Ableitung des interessanten Satzes von *Lévy-Cramer*, daß, wenn die Summe zweier unabhängiger Variabler normal verteilt ist, auch die beiden Summanden es sind, sowie entsprechender Sätze für Poissonsche und Cauchysche Verteilung, ferner des Satzes von *Marcinkiewicz*, daß in einer charakteristischen Funktion der Form e^P (P — Polynom) P notwendig vom Grad $\leqslant 2$ ist. Im darauffolgenden Kapitel werden die verschiedensten, mit der Normalverteilung zusammenhängenden Verteilungsgesetze untersucht, die mit den Namen „*Student*", *Behrens*, *Fisher*, *Snedecor*, *Wilks*, *Hotelling*, *Wishart*, *Bartlett* verbunden sind und für Varianzanalyse und Regressionstheorie gebraucht werden. Hier ist die prägnante Bezeichnungsweise besonders hervorzuheben, deren Fehlen in anderen Werken oft das Verständnis dieser Dinge erschwert. Der restliche Teil des Buches, auf den wir aus Raummangel nicht mehr genauer eingehen können, behandelt das Planen von Versuchen (Experimental Design) und damit zusammenhängend die Theorie der magischen Quadrate, der endlichen Körper (Galois-Felder) und endlichen projektiven Geometrien mit großer Gründlichkeit.

Die Darstellung ist sehr klar — an einigen wenigen Stellen, wie oben angeführt, etwas knapp — und im übrigen auch mit Druckfehlern behaftet; doch wird dies reichlich dadurch aufgewogen, daß der Verfasser in einer geradezu idealen, konkreten Ausdrucksweise die Dinge immer beim richtigen Namen nennt und in seinem Werk eine ungeheure Fülle von Stoff behandelt. Das Buch ist für jeden, der die Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung schon kennt, eine hohe (aber nicht zu hohe) Schule für das Verständnis der modernsten Erkenntnisse.

K. Prachar, Wien

Games and Decisions. Von *R. D. Luce* und *H. Raiffa*. Mit Textabb., XIX, 509 S. New York: John Wiley & Sons. London: Chapman & Hall. 1957. $ 8.75.

Über die Theorie der Spiele und der Entscheidungsfunktionen existieren zur Zeit eine Reihe von ausgezeichneten Büchern im angelsächsischen Sprachgebiet, welche jedoch fast durchwegs erhebliche mathematische Kenntnisse voraussetzen und überdies auf Anwendungen wenig eingehen. Das grundlegende Werk von *v. Neumann* und *Morgenstern*, welches zum ersten Mal in umfassender Form die Anwendungen der Spieltheorie auf die Wirtschaftswissenschaften darlegt, ist mathematisch anspruchsvoll. Das vorliegende Buch ist nun bemüht, die Theorie durch möglichste Zurückhaltung auf mathematischem Gebiet und einen „beschreibenden Stil" jenen nahezubringen, welche sich für die Anwendungen in der Sozial- und Wirtschaftswissenschaft interessieren. Dabei ist keineswegs daran gedacht, im Elementaren steckenzubleiben. So werden z. B. in den 14 Kapiteln des Buches u. a. allgemeine n-Personenspiele recht ausführlich untersucht und im Anhang, der seinerseits 8 Abschnitte umfaßt und das mathematische Verständnis des Lesers stärker beansprucht, Spiele mit unendlicher Strategiemenge behandelt. Die Darstellung ist breit und öfter treten Plausibilitätsbetrachtungen an Stelle von mathematischen Beweisen. Trotzdem wird ein Leser, der nicht bereit ist, sich in die mathematische Denkweise einzuleben, nur schwer zum vollen Verständnis des Werkes vordringen können. Das liegt aber wohl in der Natur der Sache. Für den mathematisch besonders

interessierten Leser sind ausreichend viele Literaturhinweise vorhanden. Am Ende der meisten Kapitel befindet sich eine aus wenigen Seiten bestehende Zusammenfassung, welche eine rasche Orientierung erlaubt. Selbstverständlich haben die Verfasser nicht nur referiert, sondern auch eigene Forschungsergebnisse verarbeitet und manches Bekannte in neuem Lichte erscheinen lassen.

Außer dem angeführten Personenkreis kann das Buch auch zweifelsohne jedem Mathematiker empfohlen werden, der einen ersten Überblick über die einschlägigen Probleme gewinnen will. *L. Schmetterer*, Hamburg

Sampling Opinions. An Analysis of Survey Procedure. Von *F. F. Stephan* und *Ph. J. McCarthy*. (A Wiley Publication in Statistics.) Mit 1 Textabb., XXI, 451 S. New York: J. Wiley & Sons. London: Chapman & Hall. 1958. $ 12.—.

Seit 15 Jahren ist die Meinungs- und Marktforschung besonders in den USA in großem Aufschwung. Für alle, die dafür Interesse haben, auch wenn sie beruflich nichts damit zu tun haben, ist das Buch geschrieben. Die Leser brauchen keine Kenntnisse der mathematischen Statistik zu haben. In leicht verständlicher Sprache werden die Stichprobenverfahren erläutert, die in der Meinungs- und Marktforschung angewandt werden. Auf die vielen in der Praxis auftretenden Schwierigkeiten wird stets hingewiesen. Einen breiten Teil (2. Teil des Buches) nehmen die Berichte über empirische Untersuchungen ein. Sie sind den Nichtmathematikern einleuchtender als theoretische Überlegungen. Im dritten Teil werden die Probleme geschildert, die beim Planen von Stichproben entstehen. Auch wer sich nur für die Ergebnisse der Stichproben interessiert, sollte doch den dritten Teil lesen, um ein besseres Verständnis zu bekommen. Das Buch enthält nur ganz wenige mathematische Formeln und auch diese werden ohne Beweis angegeben. Will der Leser die Formeln nicht nur gebrauchen, sondern auch voll verstehen, dann ist ein ernstes Studium der mathematischen Statistik erforderlich. Die einschlägigen Lehrbücher und Arbeiten werden am Ende jedes Paragraphen angegeben. Solange man nur beschreibende Statistik betreibt, kommt man fast ohne Mathematik ganz gut aus. Wenn man aber erfahren will, wie weit die aus den statistischen Daten gezogenen Schlüsse gelten, wenn man also über die Zuverlässigkeit der Vorhersagen Auskunft bekommen will, dann braucht man Mathematik. DasBuch ist daher kein Ersatz für die Lehrbücher der mathematischen Statistik, was auch von den Verfassern zugegeben wird. Für Mathematiker, die Interesse für angewandte Statistik haben, ist das Buch eine wertvolle Ergänzung nach der praktischen Seite. *N. Hofreiter*, Wien

Mathematical Foundations of Information Theory. Von *A. I. Khinchin*. Ins Englische übertragen von *R. A. Silverman* und *M. D. Friedman*. 120 S. New York: Dover Publications Inc. 1957. $ 1.35.

Das Buch enthält die Übersetzungen der zwei bekannten Arbeiten des Verfassers zur Informationstheorie aus Uspechi 1953 und 1956. Diese 120 Seiten liefern die beste Darstellung der mathematischen Theorie, die es gibt.

E. Hlawka, Wien

Herausgeber, Eigentümer und Verleger: Springer-Verlag, Wien, I., Mölkerbastei 5. - Für den Inhalt verantwortlich: Prof. Dr. Nikolaus Hofreiter, Wien, IV., Schelleingasse 39. - Druck: Tiroler Graphik, Ges. m. b. H., Innsbruck, Innrain 27—29

SPRINGER-VERLAG IN WIEN

Acta Physica Austriaca

Unter Mitwirkung der Österreichischen Akademie der Wissenschaften

herausgegeben von

Fritz Regler und **Hans Thirring**
Wien Wien

Schriftleitung: **Paul Urban,** Graz

Band XII, Heft 1

(Ausgegeben im Mai 1958.) Mit 23 Abbildungen. 120 Seiten. 1958

S 174.—, DM 29.—, sfr. 29.70, $ 6.90

Inhaltsverzeichnis: **Flamm, L.** HANS THIRRING zu seinem 70. Geburtstag. — **Sexl, Th.,** und **K. Spielberg.** Zum Stabilitätsproblem der POISEUILLE-Strömung. — **Rotter, F.** Einige Anwendungen der vier Leuchtdichtefunktionen des Schwarzen Körpers in der Präzisionsphotometrie. — **Krzywoblocki, M. Z. v.** On Some Aspects of Diabetic Flow and General Interpretation of the Wave Mechanics Fundamental Equation. — **Banerjee, H.** Polarisation Effects in Elastic Scattering of DIRAC Electrons by Screened COLOUMB Field. — **Hittmair, O.** Kernreaktionen in direkter Wechselwirkung. — **Székely, A.** Untersuchungen eines ionisierten Gases mittels schwacher elektrischer Wechselfelder. — **Barakat, N.** Two-Beam High Contrast Interferometry. — Buchbesprechungen.

ASTRONAUTICA ACTA

OFFIZIELLES ORGAN DER INTERNATIONALEN ASTRONAUTISCHEN FÖDERATION | OFFICIAL JOURNAL OF THE INTERNATIONAL ASTRONAUTICAL FEDERATION | ORGANE OFFICIEL DE LA FÉDÉRATION INTERNATIONALE D'ASTRONAUTIQUE

HERAUSGEGEBEN VON / EDITORIAL BOARD / COMITÉ DES RÉDACTEURS

W. v. BRAUN-Huntsville/Ala. — A. EULA-Roma
B. FRAEIJS DE VEUBEKE-Liége — J. M. J. KOOY-Breda
F. I. ORDWAY III-Huntsville/Ala. — E. SÄNGER-Stuttgart
K. SCHÜTTE-München — L. I. SEDOV-Moskva
L. R. SHEPHERD-Chilton — J. STEMMER-Baden/Schweiz

SCHRIFTLEITUNG / EDITOR-IN-CHIEF / RÉDACTEUR EN CHEF

F. Hecht, Wien

Mitglieder der Internationalen Astronautischen Föderation (IAF) bzw. deren Mitgliedsgesellschaften können die Zeitschrift als das Organ der IAF zu einem um 20% ermäßigten Preis beziehen

VOL. IV / FASC. 2. — Mit 20 Abbildungen. 54 Seiten. 1958

Inhaltsverzeichnis: **Perkins, F. M.** An Analytical Solution for Flight Time of Satellites in Eccentric and Circular Orbits. — **Vertregt, M.** Die Bahnbestimmung aus dem Vektor der Bahngeschwindigkeit. — **Winterberg, F.** Besondere Brennstoffverteilungen und Kühlungsprobleme in Reaktoren von Kernraketen. — Buchbesprechung.

Einzelheftpreis: S 72.—, DM 12.—, sfr. 12.40, $ 2.85
Jahresbezugspreis: S 216.—, DM 36.—, sfr. 37.20, $ 8.60

Zu beziehen durch Ihre Buchhandlung

Technische Elektrodynamik

Von Dr.-Ing. Dipl.-Ing. **Franz Ollendorff**, Member I. E. E., Member A. I. E. E., Senior Member I. R. E., Research-Professor der Elektrotechnik der Hebräischen Technischen Hochschule Haifa, Mitglied des wissenschaftlichen Forschungsrates für Israel

Band I: **Berechnung magnetischer Felder.** Mit 287 Textabbildungen, X, 432 Seiten. Gr.-8°. 1952. Ganzleinen S 396.—, DM 66.—, sfr. 67.50, $ 15.70

„ ... Die Auswahl der durchgerechneten Aufgaben beweist aufs neue, daß eine der Fähigkeiten des Theoretikers darin bestehen muß, Probleme zu sehen, eine andere, sie in der richtigen Weise zu idealisieren. Mit diesen beiden Gaben vereinigt der Verfasser die weitere hohe Kunst, die notwendigen mathematischen Hilfsmittel in meisterhafter Weise einzusetzen und zu handhaben ..."

ETZ Elektrotechnische Zeitschrift

Band II: **Innere Elektronik.**

Erster Teil: **Elektronik des Einzelelektrons.** Mit 313 Textabbildungen. XII, 643 Seiten. Gr.-8°. 1955.

Ganzleinen S 582.—, DM 97.—, sfr. 99.30, $ 23.10

„ ... Der durch frühere hervorragende Bücher der gleichen Materie hinreichend bekannte Autor beherrscht dieses nicht einfache Gebiet in vollendeter Weise. Dadurch ist ihm eine überaus klare Darstellung der mathematischen Analysen gelungen, die er durchwegs so vollständig durchführt, daß auch der mathematisch nicht ungewöhnlich vorgebildete Leser bei entsprechend sorgfältigem Studium jedem einzelnen Schritt folgen kann. Darin liegt neben dem praktischen Wert der unmittelbaren Behandlung technisch wichtiger Probleme ein hoher didaktischer Wert des Werkes für den Studierenden wie für den in der praktischen Entwicklung stehenden Physiker." *Archiv der elektrischen Übertragung*

Zweiter Teil: **Elektronik freier Raumladungen.** Mit 240 Textabbildungen. XII, 620 Seiten. Gr.-8°. 1957.

Ganzleinen S 588.—, DM 98.—, sfr. 100.30, $ 23.35

„ ... The treatment is mathematical throughout. The author never stops for descriptive or qualitative explanations. Every definition is immediately given quantitatively, and the whole argument is carried out in the form of mathematically formulated questions and answers. The work is very impressive, one might almost say monumental. The presentation is clear and concise, and, with certain exceptions, the mathematics is sufficiently elementary to be followed by a good engineering student. The treatment and presentation are very systematic and original ... It is rather a book which a valve engineer might study with benefit to receive inspiration and guidance on how to attack and solve his own problems." *Journal of the Institution of Electrical Engineers*

Dritter Teil: **Statistische Elektronik.** *In Vorbereitung*

Vierter Teil: **Kristallelektronik.** *In Vorbereitung*

Band III: **Ionik.** *In Vorbereitung*